





البحتة

2030 رؤية مصر EGYPT VISION

بنك المعرفة المصري Egyptian Knowledge Bank

# الصف الثانى الثانوى

## كتاب الطالب الفصل الدراسى الأول

## القسم العلمي

تأليف

أ/ كمال يونس كبشة

أ.د/ عفاف أبو الفتوح صالح
أ/ سيرافيم إلياس إسكندر

أ/ مجدى عبد الفتاح الصفتى
أ/ أسامة جابر عبد الحافظ

مراجعة

أ/سمير محمد سعداوي
أ/فتحي احمد شحاتة

٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م



الاســـم : ............................

المدرسة : ............................

الفصــل : ............................

العنـوان : ............................

العام الدراسى : ......................

# المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

**يسعدنا ونحن نقدم هذا الكتاب أن نوضح الفلسفة التى تم فى ضوئها بناء المادة التعليمية ونوجزها فيمايلى:**

١ تنمية وحدة المعرفة وتكاملها فى الرياضيات، ودمج المفاهيم والترابط بين كل مجالات الرياضيات المدرسية.

٢ تزويد المتعلم بما هو وظيفى من معلومات ومفاهيم وخطط لحل المشكلات.

٣ تبنّى مدخل المعايير القومية للتعليم فى مصر والمستويات التعليمية وذلك من خلال:

أ) تحديد ما ينبغى على المتعلم أن يتعلمه ولماذا يتعلمه.

ب) تحديد مخرجات التعلم بدقة، وقد ركزت على مايلى:

أن يظل تعلم الرياضيات هدف يسعى المتعلم لتحقيقه طوال حياته - أن يكون المتعلم محبًّا للرياضيات ومبادرًا بدراستها - أن يكون المتعلم قادرًا على العمل منفردًا أو ضمن فريق - أن يكون المتعلم نشطًا ومثابرًا ومواظبًا ومبتكرًا - أن يكون المتعلم قادرًا على التواصل بلغة الرياضيات.

٤ اقتراح أساليب وطرق للتدريس وذلك من خلال كتاب (دليل المعلم).

٥ اقتراح أنشطة متنوعة تتناسب مع المحتوى ليختار المتعلم النشاط الملائم له.

٦ احترام الرياضيات واحترام المساهمات الإنسانية منها على مستوى العالم والأمة والوطن، وتعرف مساهمات وإنجازات العلماء المسلمين والعرب والأجانب.

**وفى ضوء ما سبق روعى فى هذا الكتاب ما يلى:**

★ يتضمن الكتاب ثلاثة مجالات هى: الجبر والعلاقات والدوال، الحُسبان (التفاضل والتكامل)، حساب المثلثات، وتم تقسيم الكتاب إلى وحدات متكاملة ومترابطة، لكل منها مقدمة توضح مخرجات التعلم المستهدفة، ومخطط تنظيمى لها، والمصطلحات الواردة بها باللغة العربية والإنجليزية، ومقسمة إلى دروس يوضح الهدف من تدريسها للطالب تحت عنوان سوف تتعلم، ويبدأ كل درس من دروس كل وحدة بالفكرة الأساسية لمحتوى الدرس وروعى عرض المادة العلمية من السهل إلى الصعب ويتضمن مجموعة من الأنشطة التى تتناول الربط بالمواد الأخرى والحياة العملية والتى تناسب القدرات المختلفة للطلاب وتراعى الفروق الفردية من خلال بند اكتشف الخطأ لمعالجة بعض الأخطاء الشائعة لدى الطلاب وتؤكد على العمل التعاونى، وتتكامل مع الموضوع كما يتضمن الكتاب بعض القضايا المرتبطة بالبيئة المحيطة وكيفية معالجتها.

★ كما قدم فى كل درس أمثلة تبدأ من السهل إلى الصعب، وتشمل مستويات تفكير متنوعة، مع تدريبات عليها تحت عنوان حاول أن تحل وينتهى كل درس ببند «تمارين» وتشمل مسائل متنوعة تتناول المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في الدرس.

★ تنتهى كل وحدة بملخص للوحدة يتناول المفاهيم والتعليمات الواردة بالوحدة وتمارين عامة تشمل مسائل متنوعة على المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب في هذه الوحدة.

★ تُختم وحدات الكتاب باختبار تراكمى يقيس بعض المهارات الازمة لتحقيق مخرجات تعلم الوحدة.

★ ينتهى الكتاب باختبارات عامة تشمل بعض المفاهيم والمهارات التي درسها الطالب خلال الفصل الدراسى.

وأخيرًا ..نتمنى أن نكون قد وفقنا فى إنجاز هذا العمل لما فيه خير لأولادنا، ولمصرنا العزيزة.

والله من وراء القصد، وهو يهدى إلى سواء السبيل

# المحتويات

## الوحدة الأولى

### الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات



## الوحدة الثانية

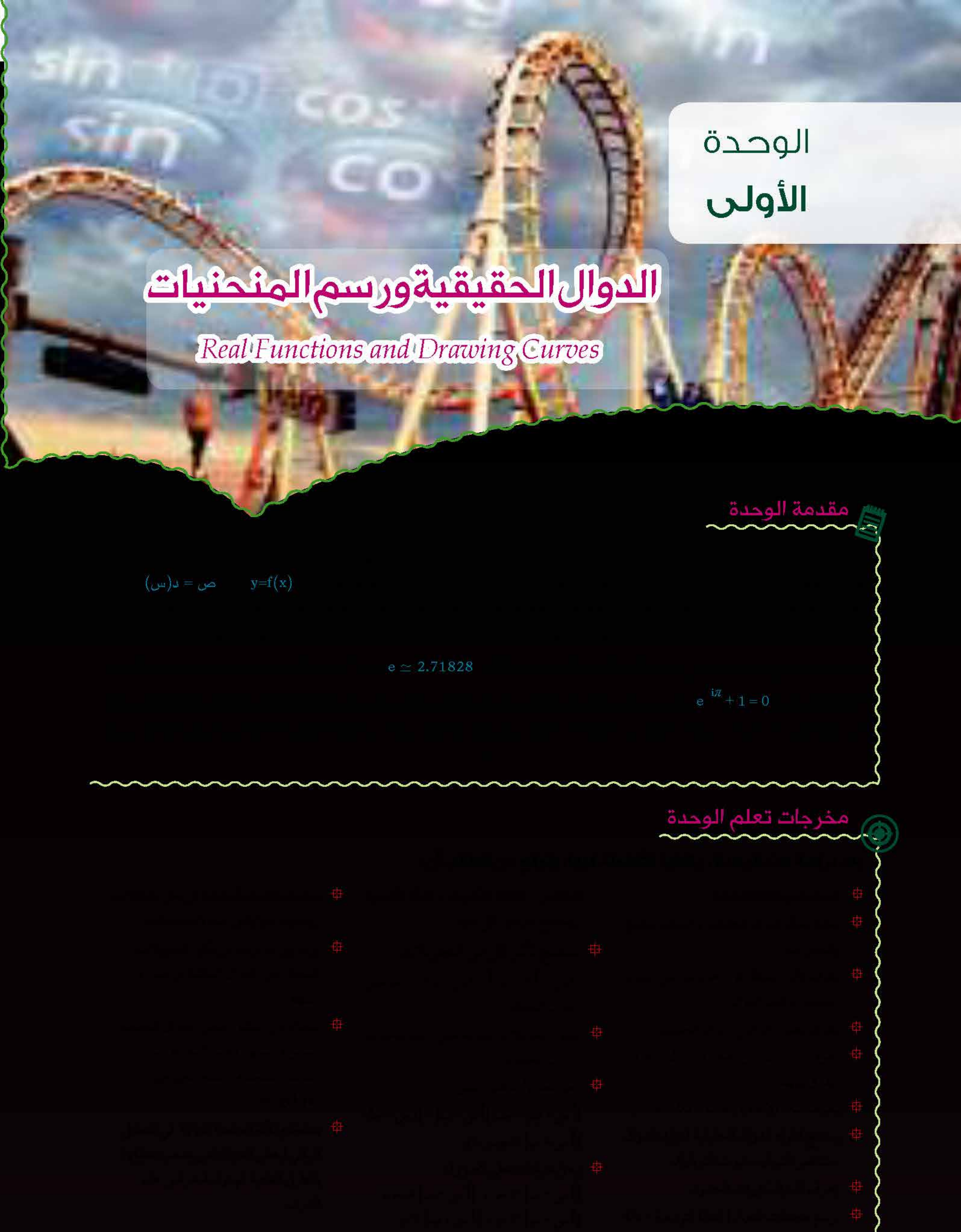
### الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

# المحتويات

## الوحدة الثالثة
## النهايات والاتصال



## الوحدة الرابعة
## حساب المثلثات



الوحدة

# الأولى

# الدوال الحقيقية ورسم المنحنيات

## *Real Functions and Drawing Curves*

## مقدمة الوحدة

ص = د(س) $y=f(x)$

$e \simeq 2.71828$

$e^{i\pi}+1=0$

## مخرجات تعلم الوحدة

## المصطلحات الأساسية

## دروس الوحدة

الدرس (١ - ١):

الدرس (١ - ٢):

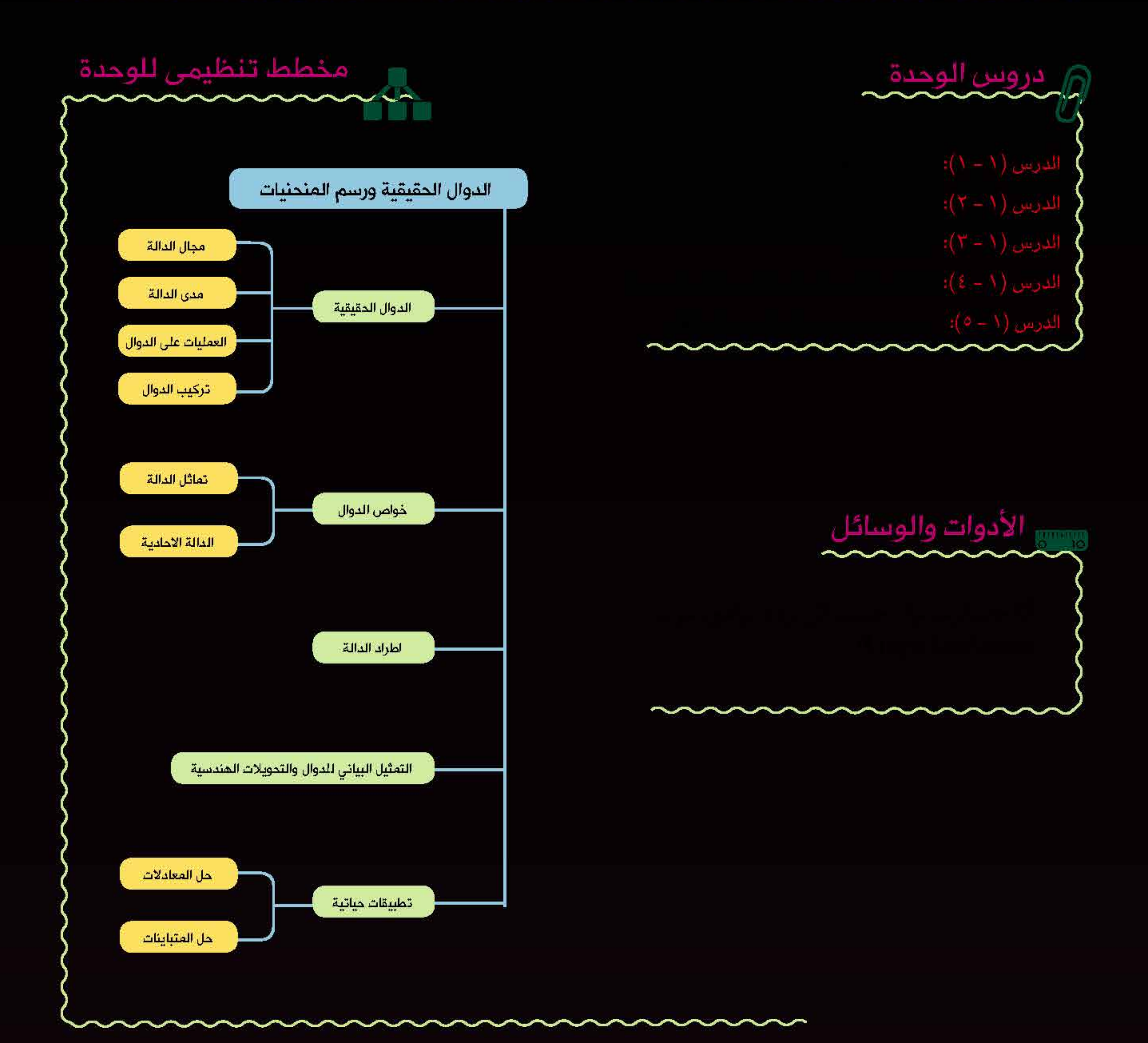
الدرس (١ - ٣):

الدرس (١ - ٤):

الدرس (١ - ٥):

## الأدوات والوسائل

## مخطط تنظيمي للوحدة



# ١ - ١ الدوال الحقيقية

*Real Functions*

**سوف تتعلم**

- مفهوم الدالة الحقيقية.
- اختبار الخط الرأسي.
- الدالة متعددة التعريف ( المعرفة بأكثر من قاعدة).
- تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية.
- العمليات على الدوال.

**المصطلحات الأساسية**

- دالة Function
- مجال Domain
- مجال مقابل Co-domain
- مدى Range
- مخطط سهمي Arrow Diagram
- مخطط بياني Cartesian Diagram
- خط رأسي Vertical Line
- دالة متعددة التعريف Piecewise Function

**الأدوات المستخدمة**

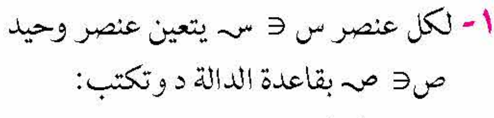
- آله حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسب.

## استكشف

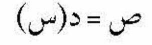
سبق أن درست مفهوم الدالة، وعلمت بأنها علاقة بين مجموعتين غير خاليتين سـ ، صـ بحيث تحدد لكل عنصر من عناصر سـ عنصرًا وحيدًا من عناصر صـ
ويرمز للدالة بأحد الرموز: د أو ق أو ر أو ....

إذا رمزنا لدالة ما من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ بالرمز د فإنها تكتب رياضيًّا:

د: سـ ⟵ صـ وتقرأ د دالة من سـ إلى صـ ويلاحظ:



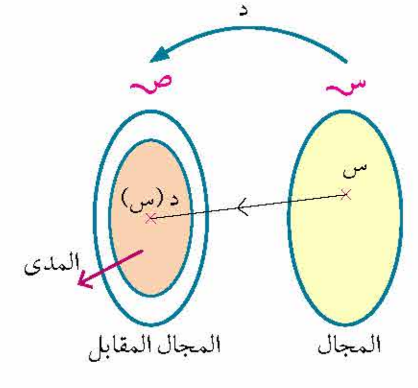
١- لكل عنصر س ∈ سـ يتعين عنصر وحيد
ص∈ صـ بقاعدة الدالة د وتكتب:



ص = د(س)

٢- تسمى المجموعة سـ مجال الدالة ، وتسمى المجموعة صـ المجال المقابل للدالة.

٣- تسمى المجموعة {ص = د(س): س ∈ سـ} مدى الدالة وتعرف بمجموعة صور عناصر مجال الدالة.

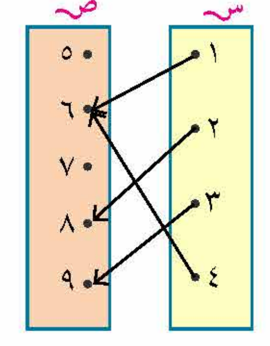



**تعريف ١**

**الدالة الحقيقية** *Real Function*

تسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية ع أو مجموعة جزئية منها.

## مثال




١ العلاقة من المجموعة سـ إلى المجموعة صـ الممثلة فى المخطط السهمى المجاور تمثل دالة، حيث:

المجموعة سـ هى مجال الدالة = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

والمجموعة صـ المجال المقابل للدالة = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

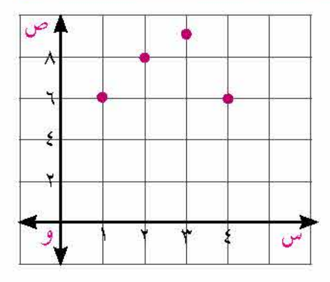
أما مجموعة العناصر {٦ ، ٨ ، ٩} فتعرف بمدى الدالة

كما يمكن تمثيل العلاقة السابقة بالمخطط البيانى كما فى الشكل التالى حيث:

بيان الدالة = {(١ ، ٦)، (٢ ، ٨)، (٣ ، ٩)، (٤ ، ٦)}

**تذكر أن**

إذا كانت د: سـ ⟵ صـ
فإن بيان د =
{(س، ص): س ∈ سـ ، ص ∈ صـ ، ص = د(س)}



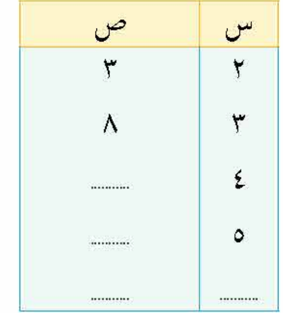
لاحظ أن:

**١-** الشكل البياني للدالة هو مجموعة من النقط المنفصلة

**٢-** الخط الرأسى المار عند كل عنصر من عناصر مجال الدالة يقطع تمثيلها البياني فى نقطة وحيدة.

### حاول أن تحل

(١) في النمط المقابل جميع المربعات متطابقة. إذا كان س عدد صفوف الشكل فى هذا النمط، ص مساحة الشكل بالوحدات المربعة.



| س | ص |
|---|---|
| ٢ | ٣ |
| ٣ | ٨ |
| ٤ | ......... |
| ٥ | ......... |
| ......... | ......... |

أ) ما قيمة ص عندما س = ٥؟

ما قيمة ص عندما س = ٩ ؟

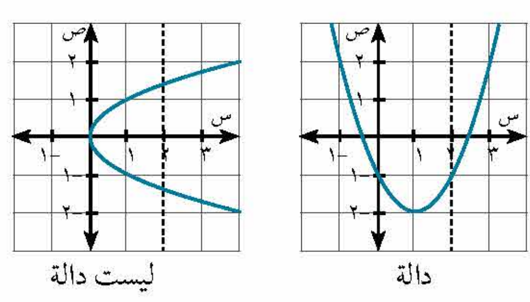
ب) اكتب العلاقة الرياضية بين عدد صفوف الشكل ومساحته فى هذا النمط.

جـ) هل هذه العلاقة دالة من س إلى ص ؟ فسر إجابتك.

## تعلم

### اختبار الخط الرأسى

إذا وجد أن الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال يمر بنقطة واحدة فقط من النقط التى تمثل العلاقة؛ كانت العلاقة دالة من س ⟵ ص



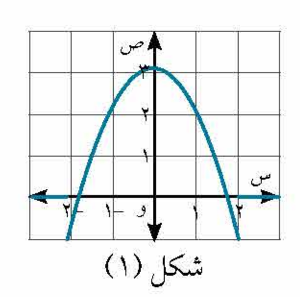
دالة     ليست دالة

### مثال

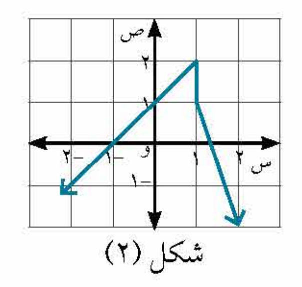


**تحديد العلاقات التى تمثل دالة** *Identify the Relations Representing Function*

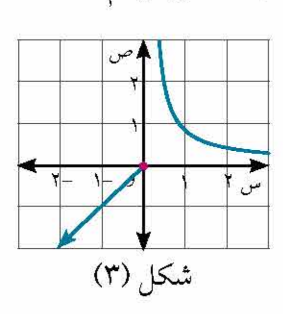
(٢) فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن ما إذا كانت ص تمثل دالة فى س أم لا.



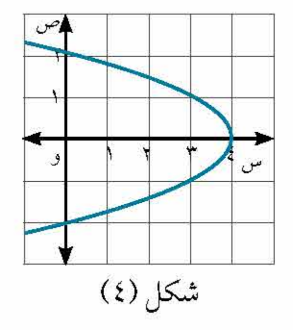
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

**الحل**

شكل (١) يمثل دالة فى س.

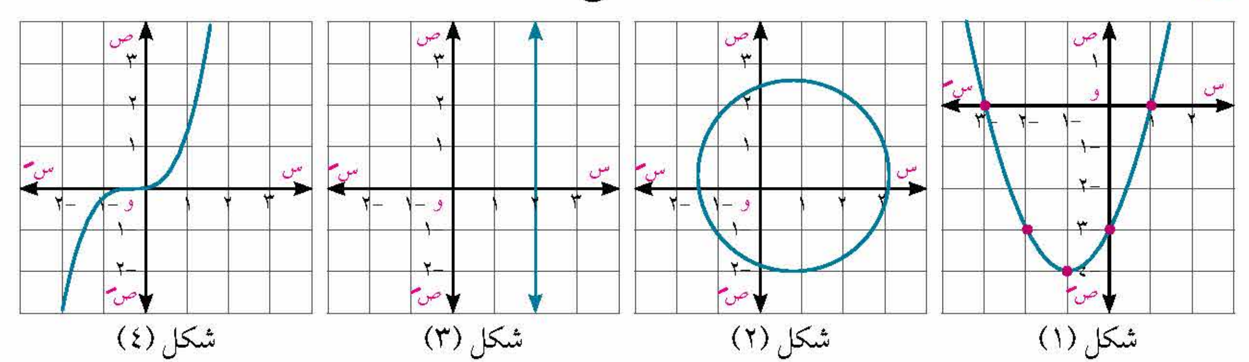
شكل (٢) لا يمثل دالة فى س لأن الخط الرأسى المار بالنقطة (١، ٠) يقطع الشكل البيانى فى عدد غير منتهٍ من النقط.

شكل (٣) يمثل دالة فى س .

شكل (٤) لا يمثل دالة فى س لأنه يوجد خط رأسي يقطع المنحنى في أكثر من نقطة.

**حاول أن تحل**

٢ بين أى الأشكال الآتية تمثل دالة من سـ ⟵ صـ مع ذكر السبب.




## مثال

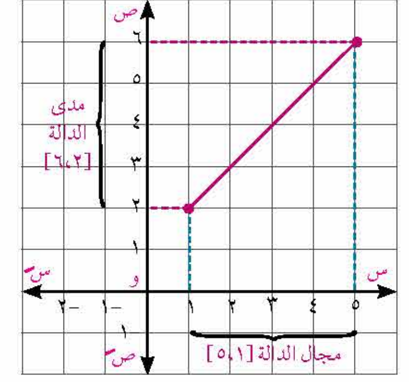
### تعيين مدى الدالة بيانيًا

٣ أ إذا كانت د: [١، ٥] ⟵ ع حيث د(س) = س + ١

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت ر: [١، ٥[ ⟵ ع حيث ر(س) = س + ١

ارسم الشكل البيانى للدالة ر ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

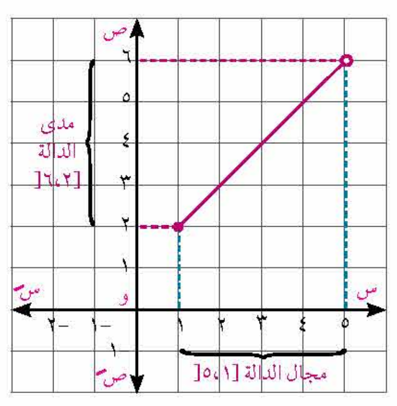



**الحل**

أ الدالة د دالة خطية مجالها [١، ٥] تمثل بيانيًا بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (١، د(١)) ، (٥، د(٥)) أى النقطتين (١، ٢)، (٥، ٦).

مدى الدالة د = [٢، ٦]

وهو مجموعة الاحداثيات الصادية لجميع النقط التى تنتمى إلى منحنى الدالة.




ب الدالة ر دالة خطية مجالها [١، ٥[ وواضح أن ر(س) = د(س) لكل س ∈ [١، ٥[ فتمثل بيانيًا بقطعة مستقيمة إحدى طرفيها النقطة (١، ٢) مع إستبعاد النقطة الأخرى (٥، ٦) من الشكل البيانى بوضع دائرة مفرغة عند هذه النقطة.

مدى الدالة ر= [٢، ٦[

**حاول أن تحل**

٣ أ إذا كانت د: [١ ، ∞[ ⟵ ع ، حيث د(س) = ١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

ب إذا كانت ر: ]-∞، -١[ ⟵ ع، حيث ر(س) = ١ - س

ارسم الشكل البيانى للدالة ر ، واستنتج من الرسم مدى الدالة.

## الدالة متعددة التعريف: *Piecewise-Defined Functions*



| السعر بالقروش | الاستهلاك الشهرى (متر مكعب) |
|---|---|
| ٤٠ | حتى ٢٥ |
| ١٠٠ | أكثر ٢٥ حتى ٥٠ |
| ١٥٠ | اكثر من ٥٠ |

لترشيد استهلاك الكهرباء والمياه والغاز يتم حساب قيمة الاستهلاك الشهرى منها تبعًا لشرائح خاصة تربط كمية الاستهلاك بقيمته.

يبين الجدول المقابل أسعار شرائح الاستهلاك الشهرى من الغاز الطبيعى فى المنازل بالقروش، احسب مع زميل قيمة استهلاك منزل من الغاز الطبيعى بالقروش للكميات التالية:

**١ -** ٣٠ متر مكعب شهريًا.

**٢ -** ٦٠ متر مكعب شهريًا.

[تضاف قيمة الضرائب المستحقة ورسوم تشغيل الخدمة بعد حساب قيمة الاستهلاك الشهرى]

يمكن التعبير عن الجدول السابق بالدالة د لحساب قيمة استهلاك س مترًا مكعبًا من الغاز شهريًّا حيث س∈ ع على النحو التالى:

$$د(س) = \begin{cases} ٤٠ س & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٢٥ \\ ١٠٠ س - ١٥٠٠ & \text{عندما } ٢٥ < س \leqslant ٥٠ \\ ١٥٠ س - ٤٠٠٠ & \text{عندما } س > ٥٠ \end{cases}$$

وهى دالة حقيقية متعددة التعريف (معرفة بأكثر من قاعدة)



الدالة متعددة التعريف، هي دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

**حاول أن تحل**

**٤** تحقق باستخدام الدالة السابقة من صحة اجابتك فى عمل تعاونى ، ثم احسب قيمة الاستهلاك الشهرى من الغاز للكميات التالية:

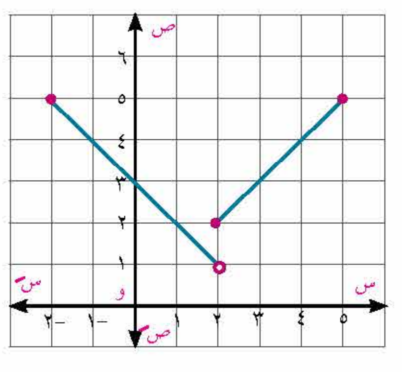
أ ١٥ متر مكعب　　ب ٤٠ متر مكعب　　جـ ٥٤ متر مكعب

### رسم الدالة متعددة التعريف:

**مثال**

**٤** إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ٣ - س & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ٢ \\ س & \text{عندما } ٢ \leqslant س \leqslant ٥ \end{cases}$

عين مجال الدالة د ومثلها بيانيًا واستنتج من الرسم المدى.



**الحل**

الدالة د معرفة على فترتين وتتعين د(س) بواسطة قاعدتين:

القاعدة الأولى: د$_{١}$(س) = ٣ - س عندما -٢ ≤ س < ٢ أي على الفترة [-٢، ٢[

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان

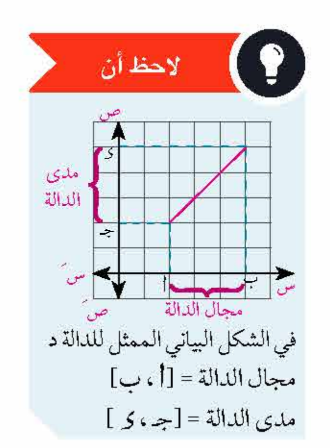
(-٢، ٥)، (٢، ١) مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ١)

لأن ٢ ∉ [-٢، ٢[ كما في الشكل المقابل.

القاعدة الثانية: د$_{٢}$(س) = س عندما ٢ ≤ س ≤ ٥ أي على الفترة [٢، ٥]

وهي لدالة خطية تمثل بقطعة مستقيمة طرفاها النقطتان (٢، ٢)، (٥،٥)

ويكون مجال الدالة د = [-٢، ٢[ ∪ [٢، ٥] = [-٢، ٥]




ويمكن من الرسم البياني نستنتج أن:

مجال الدالة د = [-٢، ٥]

مدى الدالة د = ]١، ٥]

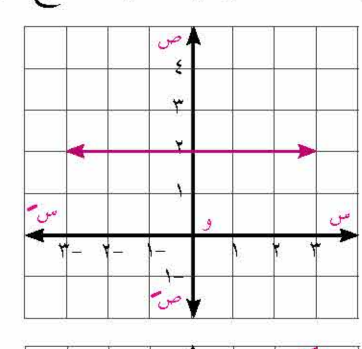
**حاول أن تحل**

⑤ إذا كانت د(س) = { س - ١ عندما -٢ ≤ س < ٠ ؛ س + ١ عندما س ≥ ٠

عين مجال الدالة ومثلها بيانيًا واستنتج من الرسم المدى.

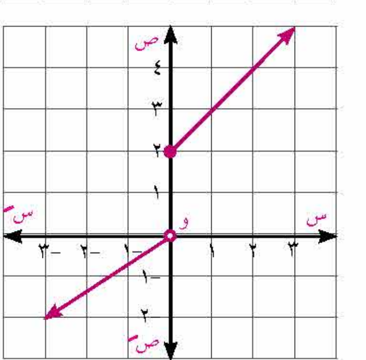
⑥ في كل من الأشكال البيانية التالية استنتج مجال ومدى الدالة.

أ

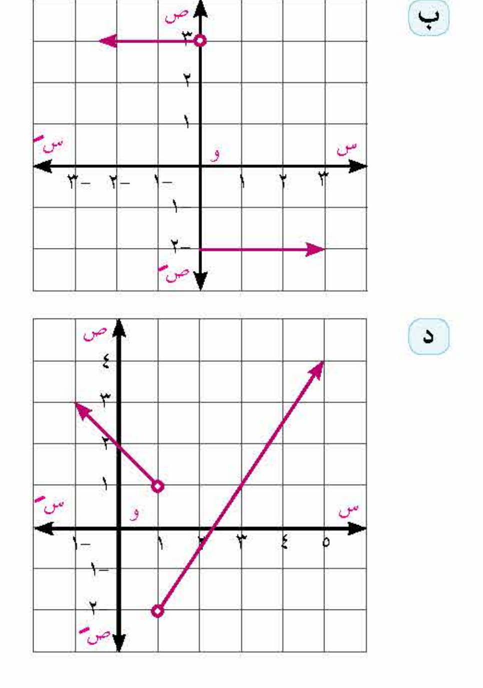


ب

ج



د



## تحديد مجال الدوال الحقيقية والعمليات عليها

*Determining the Domain of the Real Functions and Operations on it*

يتحدد مجال الدالة من قاعدة تعريفها أو الشكل البياني لها.

**تذكر أن**

مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما لم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها.

### مثال تعيين مجال الدالة *Determining Domains*

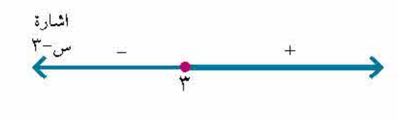
٥ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ب $د_٢(س) = \sqrt{س - ٣}$

جـ $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$ د $د_٤(س) = \frac{١}{\sqrt{س^٢ - ٤}}$

**الحل**

أ الدالة $د_١$ تكون غير معرفة عندما يكون المقام = ٠ لذلك نضع $س^٢ - ٩ = ٠$ أى $س = ±٣$
وعليه يكون مجال الدالة $د_١$ هو ع - {-٣، ٣}.




ب مجال الدالة $د_٢$ هو جميع قيم س التى تجعل قيمة ما بداخل الجذر التربيعى موجبًا أو صفرًا، أى قيم س التى تجعل $س - ٣ \geqslant ٠$

∵ $س - ٣ \geqslant ٠$ ∴ $س \geqslant ٣$ ∴ مجال $د_٢$ = [٣، ∞[.

جـ $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٦}$، دليل الجذر عدد فردى مجال $د_٣$ = ع




د تكون $د_٤$ معرفة عندما يكون $س^٢ - ٤ > ٠$
وعليه فإن مجال $د_٤$ هو ]-∞، -٢[ ∪ ]٢، ∞[ = ع - [-٢، ٢]

**لاحظ:**

إذا كانت $د(س) = \sqrt[ن]{ر(س)}$ حيث ن ∈ $ص^+$، ن > ١ ، ر (س) كثيرة حدود

أولا: عندما ن عدد فردى فإن مجال الدالة د = ع

ثانيًا: عندما ن عدد زوجى فإن: مجال الدالة د هو مجموعة قيم س بشرط $ر(س) \geqslant ٠$

### ٩ حاول أن تحل

٧ حدد مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:-

أ $د_١(س) = \frac{٢س + ٣}{س^٢ - ٣س + ٢}$ ب $د_٢(س) = \sqrt{س^٢ - ١٦}$

جـ $د_٣(س) = \sqrt[٣]{س - ٥}$ د $د_٤(س) = \frac{٥}{\sqrt{٩ - س^٢}}$

**تفكير ناقد:**

إذا كان مجال الدالة د حيث $د(س) = \frac{٢}{س^٢ - ٦س + ك}$ هو ع -{٣} أوجد قيمة ك.

## تعلم العمليات على الدوال *Operations on Functions*

إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$، $م_2$ على الترتيب ، فإن:

١ $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

٢ $(د_1 . د_2)(س) = د_1(س) . د_2(س)$ ، مجال $(د_1 . د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$

٣ $(\frac{د_1}{د_2})(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq 0$ مجال $(\frac{د_1}{د_2})$ هو $(م_1 \cap م_2) - ف(د_2)$

حيث $ف(د_2)$ مجموعة أصفار $د_2$

نلاحظ أنه في جميع الحالات السابقة ، مجال الدالة الجديدة يساوى تقاطع مجالى $د_1$، $د_2$ باستثناء القيم التى تجعل $د_2(س) = 0$ في عملية القسمة.

### مثال

٦ إذا كان $د(س) = س^2 - 4س$ ، $ر(س) = \sqrt{س + 2}$ ، $ع(س) = \sqrt{4 - س}$

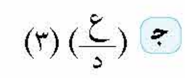
أولاً: أوجد قاعدة ومجال كل من الدوال الآتية:

أ $(د + ر)$ ب $(ر - ع)$

ج $(د . ع)$ د $(\frac{ع}{د})$

ثانيًا: احسب القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

أ $(ر - ع)(1)$ ب $(د . ع)(5)$ ج $(\frac{ع}{د})(3)$



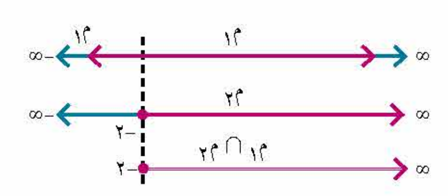
#### الحل

أولاً: مجال د = $م_1$ = ح ، مجال ر = $م_2$ = $[-2 ، \infty[$ ، مجال ع = $م_3$ = $]-\infty ، 4]$

أ $(د + ر)(س) = د(س) + ر(س)$

$= س^2 - 4س + \sqrt{س + 2}$

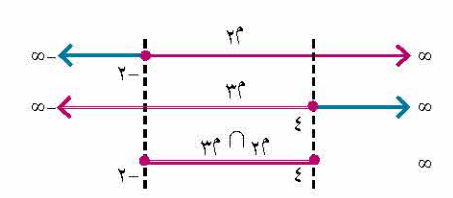
ومجال الدالة $(د + ر)$ هو ح $\cap [-2، \infty[ = [-2، \infty[$




ب $(ر - ع)(س) = ر(س) - ع(س)$

$= \sqrt{س + 2} - \sqrt{4 - س}$

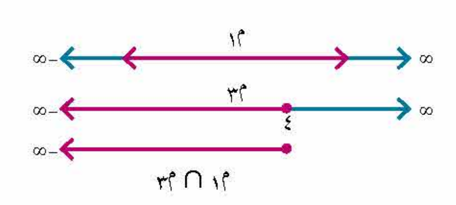
ومجال $(ر - ع)$ هو: $[-2، \infty[ \cap ]-\infty، 4] = [-2، 4]$




ج $(د . ع)(س) = د(س) . ع(س)$

$= (س^2 - 4س) \sqrt{4 - س}$

ومجال $(د . ع)$ = ح $\cap ]-\infty ، 4] = ]-\infty ، 4]$



د) $(\frac{ع}{د})$ (س) = $\frac{ع(س)}{د(س)}$ = $\frac{\sqrt{٤ - س}}{س^٢ - ٤س}$

مجموعة أصفار الدالة د هى {٠، ٤}

مجال $(\frac{ع}{د})$ = ]-∞، ٤] ∩ ح - {٠، ٤} = ]-∞، ٤[ - {٠}

م١ ∩ م٣ - ص(د)

**ثانيًا: القيم العددية:**

أ) ∵ (ر - ع) (س) = $\sqrt{س+٢}$ - $\sqrt{٤ - س}$ لكل س ∈ [-٢، ٤]

، ١ ∈ [-٢، ٤] ∴ (ر-ع)(١) = $\sqrt{٣}$ - $\sqrt{٣}$ = صفر

ب) ∵ (د.ع) (س) = (س$^٢$ - ٤س) $\sqrt{٤ - س}$ لكل س ∈ ]-∞، ٤]

، ٥ ∉ ]-∞، ٤] ∴ (د.ع)(٥) غير معرفة

جـ) ∵ $(\frac{ع}{د})$ (س) = $\frac{\sqrt{٤ - س}}{س^٢ - ٤س}$ لكل س ∈ ]-∞، ٤[ - {٠}

، ٣ ∈ ]-∞، ٤[ - {٠} ∴ $(\frac{ع}{د})$ (٣) = $\frac{\sqrt{٤ - ٣}}{٩ - ١٢}$ = - $\frac{١}{٣}$

**حاول أن تحل**

٨) إذا كانت د، ر دالتين حقيقيتين حيث:

د(س) = س$^٢$ - ٤ ، ر(س) = $\sqrt{س - ١}$ أوجد:

أ) مجال كل من الدوال الآتية: (د + ر) ، (د . ر) ، $(\frac{د}{ر})$ ، $(\frac{ر}{د})$

ب) أوجد القيمة العددية - إن أمكن - لكل من:

(د + ر) (٥) ، (د . ر) (٢) ، $(\frac{د}{ر})$ (٣) ، $(\frac{ر}{د})$ (-٢)

## عمل تعاونى

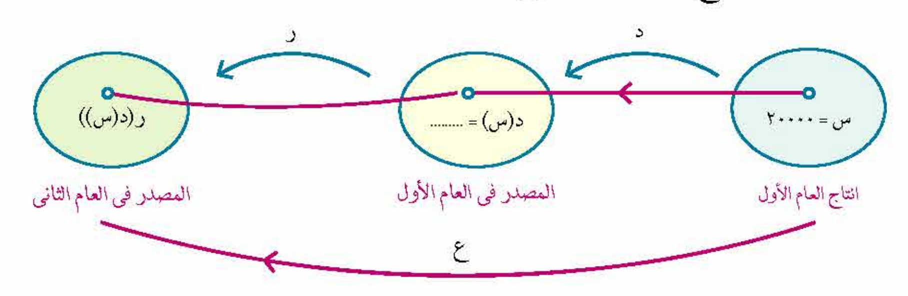
### تركيب الدوال *Composition of Functions*

يقوم مصنع بتصدير جزء من إنتاجه يعطى بالعلاقة د(س) = $\frac{١}{٤}$ س حيث س عدد الوحدات المنتجة فى العام الأول، وكان عدد الوحدات المصدرة فى العام التالى يعطى بالعلاقة ر(د) = د + ١٥٠٠ حيث د عدد الوحدات المصدرة فى العام الأول.

ابحث (مع زميل) كم يكون عدد الوحدات المصدرة فى العام الثانى إذا كان انتاج المصنع فى العام الأول

أ) ٢٠٠٠٠ وحدة ب) ٨٠٠٠٠ وحدة

للتحقق من صحة استنتاجك تتبع المخطط التالى:



## تعلم

إذا كان مدى الدالة د تقاطع مجال الدالة ر لا يساوى ∅ فإنه يمكن استنتاج دالة جديدة ع تتركب من الدالتين السابقتين وهى: ع = ر ∘ د

وتقرأ ر تركيب د، أو ر بعد د حيث تطبق الدالة د أولاً ثم الدالة ر

ويكون ع(س) = (ر ∘ د) (س)

= ر(د(س))

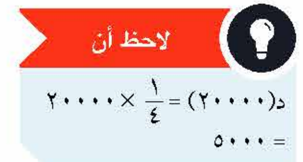
من المخطط السابق يكون:

أ ع (٢٠٠٠٠) = ر [د(٢٠٠٠٠)]

= ر(٥٠٠٠)

= ٥٠٠٠ + ١٥٠٠ = ٦٥٠٠ وحدة

ب ع (٨٠٠٠٠) = ..................




**فكر:** هل عملية تركيب الدوال عملية إبدالية؟

➤ لبحث الإجابة عن هذا السؤال أوجد (د ∘ ر) (س) ، (ر ∘ د) (س) حيث د(س) = ٤س$^{٢}$ ، ر(س) = ٢س

**حاول أن تحل**

٩ إذا كان د(س) = س$^{٢}$ + ٦ ، ر(س) = ٣س

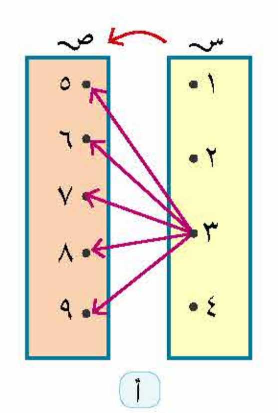
أولاً: أوجد (د ∘ ر) (٣)

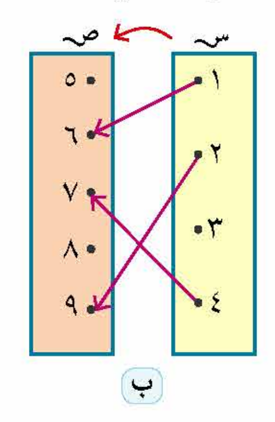
ثانياً: حدد قيم س التى تجعل (د ∘ ر) (س) = ٤٢

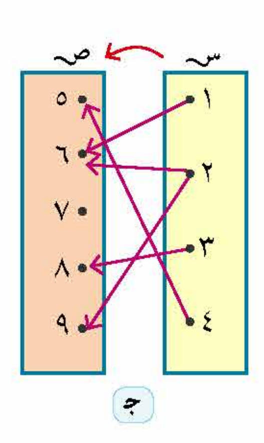


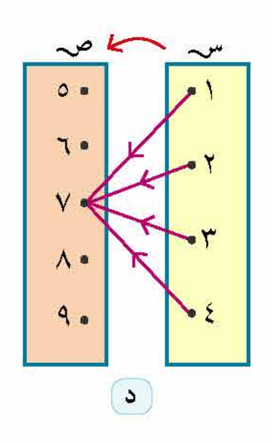

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

١ أى المخططات الآتية تمثل دالة من س إلى ص :

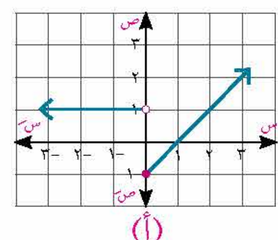


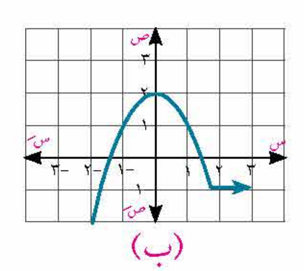



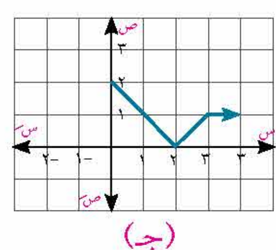



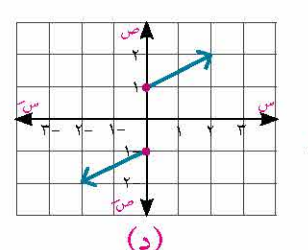



٢ أى من الأشكال البيانية الآتية لا تمثل دالة فى س:


(أ)


(ب)


(جـ)


(د)

٣ العلاقة المبينة بمجموعة الأزواج المرتبة والتي لا تمثل دالة هي:

أ {(١، ٣)، (٣، ٥)، (٥، ٧)، (٧، ٩)}

ب {(٢، ٣)، (٣، ٤)، (٢، ١)، (٣، ٥)}

جـ {(٠، ٣)، (١، ٣)، (٢، ٣)، (٣، ٣)}

د {(-٣، ٥)، (-١، ٥)، (٠، ٥)، (٢، ٥)}

٤ جميع العلاقات الآتية تكون فيها ص دالة فى س ما عدا العلاقة:

أ ص = ٣س + ١

ب ص = $س^٢$ - ٤

جـ س = $ص^٢$ - ٢

د ص = حا س

أجب عن ما يأتى:

٥ حدد مجال الدالة د حيث د(س) = { س - ١ عندما ٢ < س ⩽ ٤ ، -١ عندما -٢ ⩽ س ⩽ ٢ }

ثم ارسم الشكل البيانى للدالة ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

٦ ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

د(س) = { س + ٣ عندما س ⩾ ٢ ، ٢س - ١ عندما س < ٢ } ومن الرسم استنتج مدى الدالة.

٧ إذا كانت د(س) = { ٢س + ٣ عندما -٢ ⩽ س < ٠ ، ١ - س عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٤ }

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

٨ إذا كانت د(س) = { $س^٢$ + ١ عندما -٣ ⩽ س < ٠ ، س + ٢ عندما ٠ ⩽ س ⩽ ٣ }

ارسم الشكل البيانى للدالة د، ومن الرسم استنتج مدى الدالة

٩) إذا كان: د(س) = 
$$\begin{cases} -٤س + ٣ & \text{عندما } س < ١ \\ -س^٣ & \text{عندما } ١ \leqslant س \leqslant ٢ \\ س^٢ - ١ & \text{عندما } س > ٢ \end{cases}$$

أوجد:

أ) د(صفر)     ب) د(١)     جـ) د(٢)

١٠) الربط بالميكانيكا: إذا كانت سرعة دراجة بخارية ع(ن) بالسنتيمتر/ ثانية تعطى بالدالة ع حيث:

$$ع(ن) = \begin{cases} ٨ن & \text{عندما } ٠ \leqslant ن \leqslant ١٠ \\ ٨٠ & \text{عندما } ١٠ < ن < ٢٠٠ \\ -٤ن + ٨٨٠ & \text{عندما } ٢٠٠ \leqslant ن \leqslant ٢٢٠ \end{cases}$$

حيث ن الزمن بالثانية، أوجد:

أ) ع(١٠)     ب) ع(١٥٠)     جـ) ع(٢١٠)

١١) الربط بالتجارة: تمثل الدالة د ، حيث:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{٥}{٢}س & \text{عندما } ٠ \leqslant س \leqslant ٥٠٠٠ \\ ٢س + ٢٥٠٠ & \text{عندما } ٥٠٠٠ < س \leqslant ١٥٠٠٠ \\ \frac{٣}{٢}س + ١٠٠٠٠ & \text{عندما } ١٥٠٠٠ < س \leqslant ٦٠٠٠٠ \end{cases}$$

المبلغ بالجنيه الذى تتقاضاه شركة لتوزيع أحد الأجهزة الكهربية، حيث س تمثل عدد الأجهزة الموزعة، أوجد:

أ) د(٥٠٠٠)     ب) د(١٠٠٠٠)     جـ) د(٥٠٠٠٠)

١٢) الربط بالهندسة: إذا كان ح محيط مربع طول ضلعه ل. اكتب محيط المربع كدالة في طول ضلعه ح (ل) ثم أوجد:

أ) ح (٣)     ب) ح$(\frac{١٥}{٤})$

١٣) الربط بالهندسة: إذا كانت م مساحة دائرة طول نصف قطرها نق. اكتب المساحة كدالة فى طول نصف القطر م (نق) ثم أوجد م$(\frac{١}{٢})$ ، م(٥).

١٤) عين مجال كل من الدوال الحقيقية المعرفة بالقواعد الآتية:

أ) د(س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$     ب) د(س) = $\frac{س + ١}{س^٣ + ١}$

ج د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ د د(س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$

هـ د(س) = $\frac{٣س}{\sqrt{٢س - ١}}$ و د(س) = $\frac{١}{س} + \frac{١}{س + ٢}$

١٥ إذا كان: $د_١$: ع ⟵ ع حيث $د_١$(س) = ٣س - ١ ،

$د_٢$: [-٢، ٣] ⟵ ع حيث $د_٢$(س) = ٢ س + ٤

فأوجد: ($د_١ + د_٢$) (س) ، ($د_١ - د_٢$) (س) مبينًا مجال كل دالة.

١٦ إذا كان: $د_١$(س) = س+٢ ومجال $د_١$ = [-٣، ٤] ، $د_٢$(س) = $س^٢$ + ٢س ومجال $د_٢$ = [-١ ، ٣] ،

أوجد: ($د_١ + د_٢$) (س) ، ($د_٢ - د_١$) (س) ، ($\frac{د_١}{د_٢}$) (س) ، ($\frac{د_٢}{د_١}$) (س) مبينًا مجال كل دالة.

١٧ إذا كان: د(س) = ٣س + ١ ، ر(س) = $س^٢$ - ٥ ، ق (س) = $س^٣$

أوجد:

أ (د ∘ ر) (٢) ب (ر ∘ د) (-٣) ج (ر ∘ ق) (١) د (ق ∘ د) (-٢)

١٨ إذا كان: د(س) = $\frac{١}{س}$ ، ر(س) = س + ٣

أوجد: (د ∘ ر) (س) ، (ر ∘ د) (س) وحدد مجال كل منهما.

١٩ إذا كان: د(س) = $س^٢$ - ٣ ، ر(س) = $\sqrt{س - ٢}$

أوجد: (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة محددا المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٣)

٢٠ تفكير إبداعى:

إذا كان ع (س) = $\sqrt{س^٣ - ٤}$ فأوجد الدالتين د ، ر بحيث يكون: ع(س) = (د ∘ ر) (س)

# ١ - ٢ بعض خواص الدوال

*Some Properties of Functions*

**سوف تتعلم**

- التماثل فى منحنيات الدوال.
- الدوال الزوجية.
- الدوال الفردية.
- الدوال الأحادية.

**المصطلحات الأساسية**

- تماثل Symmetry
- دالة زوجية Even Function
- دالة فردية Odd Function
- دالة أحادية One - to - One Function
- خط أفقى Horizontal Line

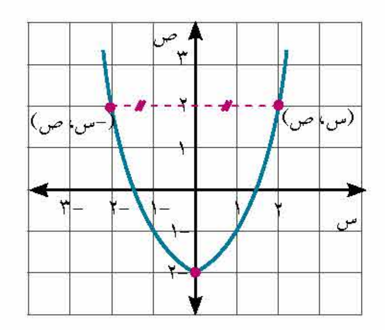
**الأدوات المستخدمة**

- آله حاسبة علمية - برامج رسومية للحاسوب

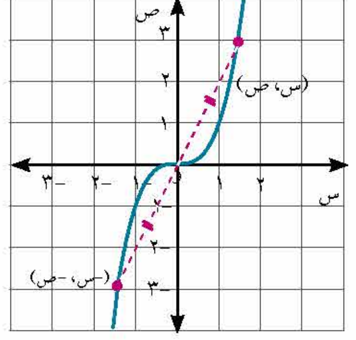
قد يتميز الشكل البيانى للدالة د حيث ص = د(س) بصفات هندسية تلاحظ من الرسم بسهولة، و يمكن استخدامها في دراسة الدوال وتطبيقاتها وأشهر هذه الصفات التماثل Symmetry حول محور الصادات أو التماثل حول نقطة الأصل.

## تمهيد

سبق أن درست التماثل حول مستقيم، حيث يمكن طى الشكل على المستقيم؛ لينطبق نصفا المنحنى تمامًا، ودرست كذلك التماثل حول نقطة الأصل.



التماثل حول محور الصادات
شكل (١)



التماثل حول نقطة الأصل.
شكل (٢)

### فى شكل (١):

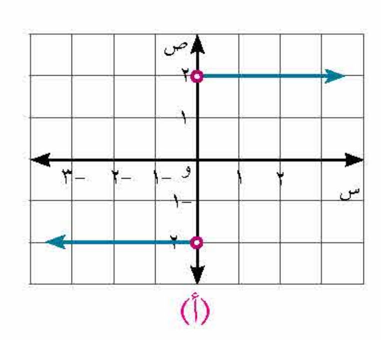
تكون النقطة (-س ، ص) الواقعة على الشكل البيانى لمنحنى الدالة هى صورة النقطة (س ، ص) الواقعة عليه أيضًا بالانعكاس حول محور الصادات.

### فى شكل (٢):

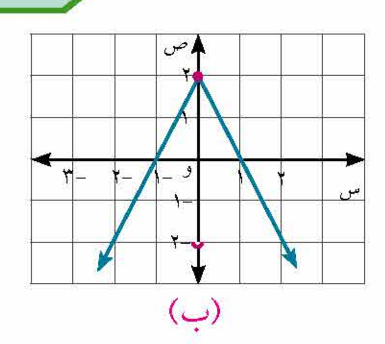
يوضح الشكل البيانى للعلاقة بين س ، ص تماثل المنحنى حول نقطة الأصل، حيث إن النقطة (-س، -ص) هي صورة النقطة (س، ص) الواقعة على نفس المنحنى.

### حاول أن تحل

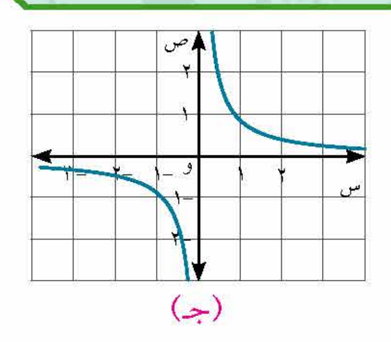
(١) فى كل شكل من الأشكال الآتية بيِّن المنحنيات المتماثلة حول محور الصادات والمنحنيات المتماثلة حول نقطة الأصل.



(أ)



(ب)



(جـ)

**تفكير ناقد:**

هل تتماثل منحنيات جميع الدوال حول محور الصادات أو حول نقطة الأصل فقط؟ فسر إجابتك.

## الدوال الزوجية والدوال الفردية: *Even and Odd Functions*



**تعلم**

**الدالة الزوجية:** يقال للدالة د: سـ ⟵ صـ إنها دالة زوجية إذا كان د (-س) = د (س)، لكل س ، -س ∈ سـ
ويكون منحنى الدالة الزوجية متماثلًا حول محور الصادات.

**الدالة الفردية:** يقال للدالة د: سـ ⟵ صـ إنها دالة فردية إذا كان د (-س) = - د (س)، لكل س ، -س ∈ سـ
ويكون منحنى الدالة الفردية متماثلًا حول نقطة الأصل.

**لاحظ:** كثير من الدوال ليست زوجية وليست فردية

عند بحث نوع الدالة من حيث كونها زوجية أو فردية يجب تحقق شرط إنتماء العنصرين س ، -س إلى مجال الدالة، و إذا لم يتحقق كانت الدالة ليست زوجية وليست فردية دون إيجاد د(-س)

### مثال

(١) ابحث نوع الدالة د في كل مما يأتي من حيث كونها دالة زوجية أو فردية.

أ د (س) = س^٢  ب د(س) = س^٣  جـ د(س) = $\sqrt{\text{س} + ٣}$  د د(س) = جتا س

**الحل**

أ د (س) = س^٢ ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س)= (-س)^٢ = س^٢

أي أن: د(-س) = د(س)  ∴ د دالة زوجية

ب د(س) = س^٣ ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع ، يكون: د(-س) = (-س)^٣ = - س^٣

أي أن: د(-س)= -د(س)  ∴ د دالة فردية

**ملاحظة هامة:**

تسمى الدالة د: ع ⟵ ع ، د(س) = أ س^ن حيث أ ≠ ٠ ، ن ∈ صـ^+ دالة القوى ،
وتكون الدالة زوجية عندما ن عدد زوجي ، فردية عندما ن عدد فردي.

ج) د(س) = $\sqrt{س + ٣}$ ، مجال د = [-٣، ∞[

لاحظ أن ٤ ∈ [-٣، ∞[ بينما -٤ ∉ [-٣ ، ∞[

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

د) د(س) = حتا س ، مجال د = ع

∴ لكل س ، -س ∈ ع يكون:

د(-س) = حتا (-س) = حتا س

أي أن: د(-س) =د(س) ∴ د دالة زوجية

**تذكر أن**

حا (-س) = - حا س

حتا (-س) = حتا س

طا (-س) = - طا س

**حاول أن تحل**

٢) ابحث نوع الدالة د فى كل مما يأتى من حيث كونها دالة زوجية أو فردية أو غير ذلك

أ) د(س) = جا س
ب) د(س) = $س^٢$ + جتا س
ج) د(س) = $س^٣$ - جا س
د) د(س) = $س^٢$ جتا س
هـ) د(س) = $س^٣$ جا س
و) د(س) = $س^٣$ جتا س
ز) د(س) = $س^٣$ + $س^٢$
ح) د(س) = جا س + جتا س
ط) د(س) = جاس جتا س

ماذا تستنتج؟

**خواص هامة:**

إذا كان كل من: $د_١$ ، $د_٢$ دالة زوجية ، وكان كل من: $ر_١$، $ر_٢$ دالة فردية ، فإن:

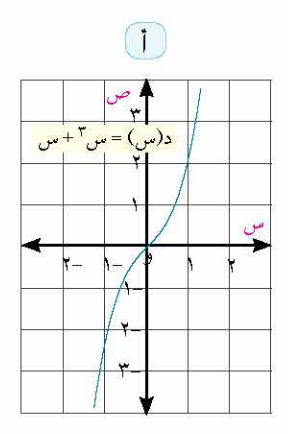
١) $د_١ + د_٢$ دالة زوجية
٢) $ر_١ + ر_٢$ دالة فردية.
٣) $د_١ \times د_٢$ دالة زوجية
٤) $ر_١ \times ر_٢$ دالة زوجية.
٥) $د_١ \times ر_٢$ دالة فردية
٦) $د_١ + ر_٢$ ليست زوجية وليست فردية.

باستخدام الخواص السابقة ، تحقق من صحة إجابتك فى بند حاول أن تحل (٢)

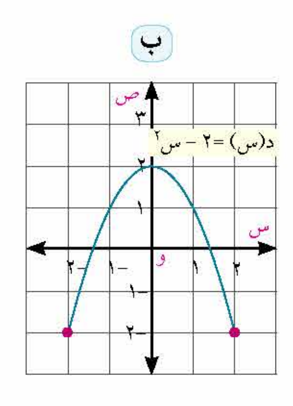
## مثال

٢) يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د، حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة د زوجية أو فردية أو غير ذلك وحقق إجابتك جبريًا.

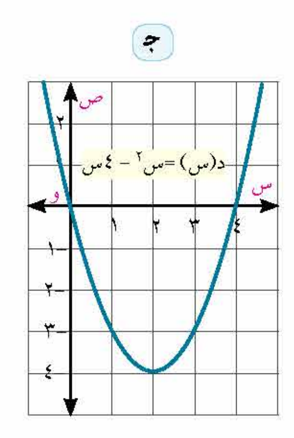
أ




ب




ج



## الحل

أ  د (س) = $س^٣$ + س، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د = ع، منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل ؛ أى أن الدالة فردية

∵ كل س ، -س ∈ ع  ∴ د (-س) = $(-س)^٣$ + (-س)

بالتبسيط:  د (-س) = - $س^٣$ - س

نأخذ (-١) عاملًا مشتركًا  د (-س) = - ($س^٣$ + س)

د (-س) = - د (س)

أى أن الدالة فردية.

ب  د (س) = ٢ - $س^٢$ ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن

مجال د = [-٢، ٢] ، ومنحنى الدالة متماثل بالنسبة لمحور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية

∵ كل س ، -س ∈ [-٢، ٢]  ∴ د (-س) = ٢ - $(-س)^٢$

بالتبسيط  د (-س) = ٢ - $س^٢$

د (-س) = د (س)  أى أن الدالة زوجية

جـ  د (س) = $س^٢$ - ٤س ، من الشكل البيانى للدالة د نلاحظ أن:

مجال د= ع ، ومنحنى الدالة ليس متماثلًا حول محور الصادات، وليس متماثلًا بالنسبة لنقطة الأصل؛

أى أن الدالة ليست زوجية وليست فردية:

∵ كل س ، -س ∈ ع  ∴ د (-س) = $(-س)^٢$ - ٤ (-س)

بالتبسيط  د (-س) = $س^٢$ + ٤س ≠ د(س) ∴ د ليست زوجية

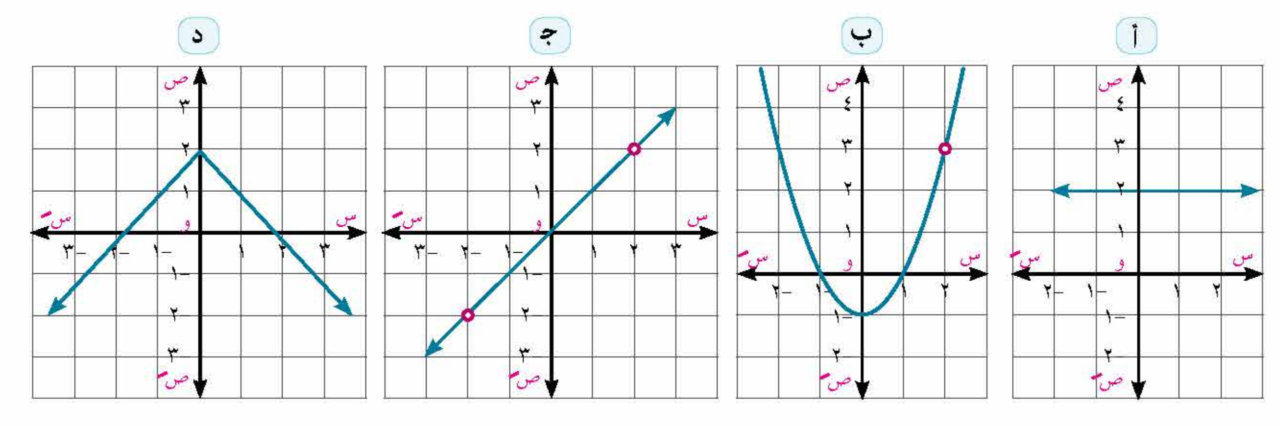
ولكن  - د (س) = - $س^٢$ + ٤ س

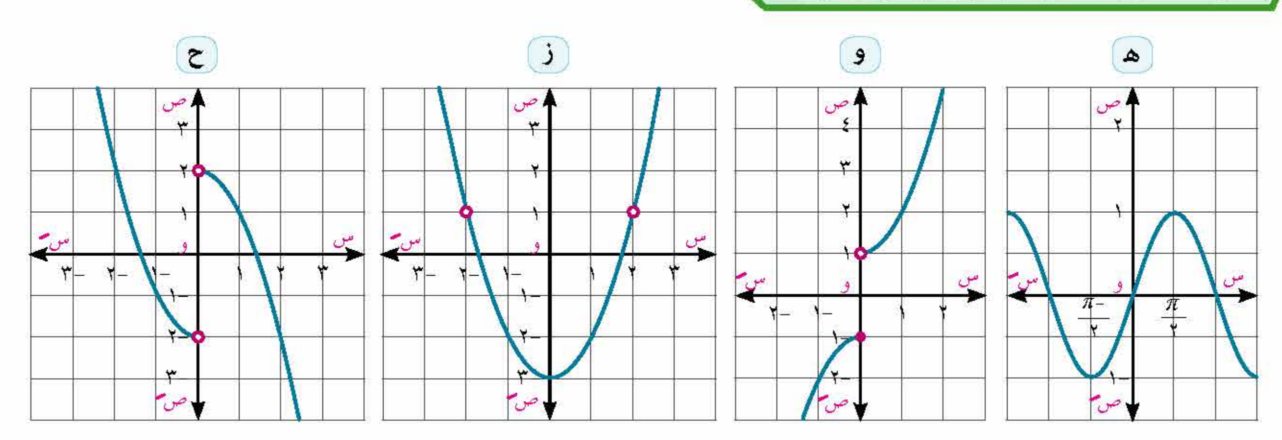
لذلك فإن  د (-س) ≠ - د (س) ∴ د ليست فردية

أى أن الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

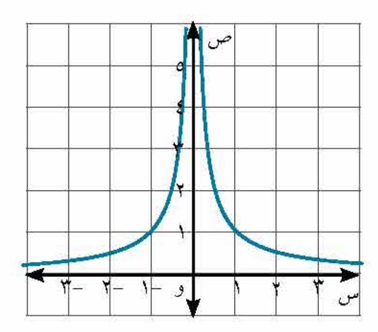
## حاول أن تحل

٣ اذكر نوع كل من الدوال الممثلة بالأشكال البيانية الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.






## مثال



٣ يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث:

$$د(س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

بين أن هذه الدالة زوجية وتحقق من ذلك جبريًّا.

**الحل**

من الشكل البيانى المجاور يتضح أن منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات؛ أى أن الدالة زوجية.

**التحقيق الجبرى:**

مجال د = ]-∞ ، ٠[ ∪ ]٠ ، ∞[

∵ كل س ، -س ∈ مجال د ∴ 
$$د(-س) = \begin{cases} -\frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) < ٠ \\ \frac{١}{(-س)} & \text{عندما } (-س) > ٠ \end{cases}$$

بالتبسيط
$$د(-س) = \begin{cases} \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \\ -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$$

بتبديل كتابة القاعدتين
$$د(-س) = \begin{cases} -\frac{١}{س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{١}{س} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$$

أى أن د (-س) = د (س) فالدالة زوجية.

**حاول أن تحل**

٤ مثِّل الدالة د حيث 
$$د(س) = \begin{cases} س + ٢ & \text{حيث } س \geqslant -٢ \\ -س - ٢ & \text{حيث } س < -٢ \end{cases}$$
بيانيًّا.

ثم بيِّن: هل الدالة زوجية أو فردية أو غير ذلك؟ وتحقق من إجابتك جبريًّا.

## الدالة الأحادية: One - to - One Function (Injective Function)

**تعريف ١**

الدالة د: س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

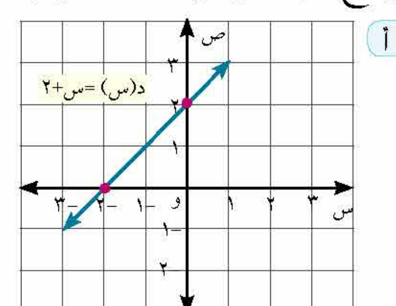
لكل أ ، ب ∈ س ، د(أ) = د(ب) فإن أ = ب

أو لكل أ ≠ ب فإن د(أ) ≠ د(ب)

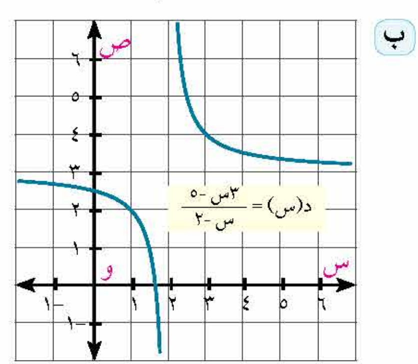
### مثال

٤ يوضح كل شكل من الأشكال البيانية الآتية منحنى الدالة د: س ⟵ ص ، أثبت أن د دالة أحادية.

أ




ب




### الحل

أ د(س) = س + ٢ ، مجال د = ع

لكل أ ، ب ∈ ع فإن د(أ) = أ + ٢ ، د(ب) = ب + ٢

بوضع د(أ) = د(ب) ∴ أ + ٢ = ب + ٢

وبحذف ٢ من الطرفين ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية

ب د(س) = $\frac{٣س - ٥}{س - ٢}$ ، مجال د = ع - {٢}

لكل أ ، ب ∈ ع - {٢} فإن د(أ) = $\frac{٣أ - ٥}{أ - ٢}$ ، د(ب) = $\frac{٣ب - ٥}{ب - ٢}$

بوضع د(أ) = د(ب) ∴ $\frac{٣أ - ٥}{أ - ٢} = \frac{٣ب - ٥}{ب - ٢}$

بالضرب التبادلى ٣أب - ٦أ - ٥ب + ١٠ = ٣أب - ٦ب - ٥أ + ١٠

بالحذف والتبسيط ∴ أ = ب لذلك فإن د دالة أحادية.



### تعلم إختبار الخط الأفقى Horizontal - Line Test

تكون الدالة د: س ⟵ ص دالة إحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات) عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة فى نقطة واحدة.

**حاول أن تحل**

٥ فى بند حاول أن تحل (٣) ص (١٩)، بين الأشكال البيانية التى تمثل دالة إحادية.

(٦) أثبت أن د: $س \longrightarrow ص$ دالة إحادية حيث:

(أ) د (س) = ٢س - ٣ (ب) ر (س) = $\frac{٣ س - ٥}{٤ س + ٣}$

## مثال

(٥) بيِّن أن الدالة د: $س \longrightarrow ص$ حيث د (س) = $س^٢$ ليست دالة أحادية.

**الحل**

د (٢) = ٤ ، د (-٢) = ٤ $\therefore$ د (-٢) = د (٢) = ٤

$\because$ -٢ $\neq$ ٢ $\therefore$ د ليست أحادية

ونلاحظ أن الخط الأفقي عند ص = ٤ يناظر قيمتين غير متساويتين للمتغير س هما -٢ ، ٢.





**حاول أن تحل**

(٧) بين أن د: $س \longrightarrow ص$ ليست دالة أحادية

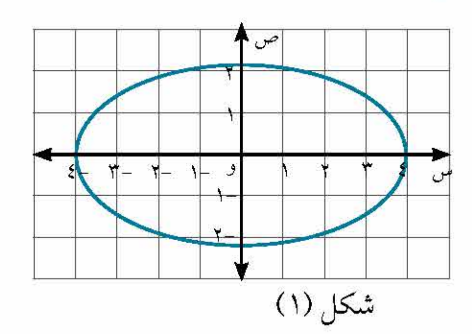
(أ) د (س) = $س^٢$ - ١ (ب) ر (س) = $س^٢$ - ٥س + ٦

**تفكير ناقد:** إذا كانت د زوجية فهل يمكن أن تكون د أحادية؟ فسر ذلك؟

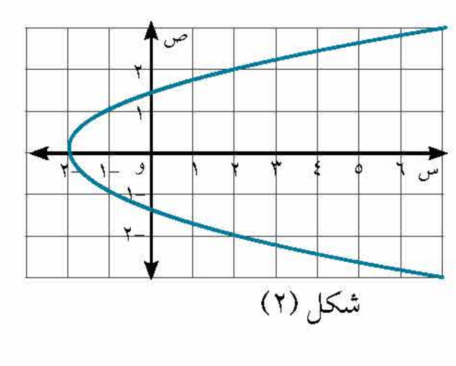


## تمارين ١ - ٢

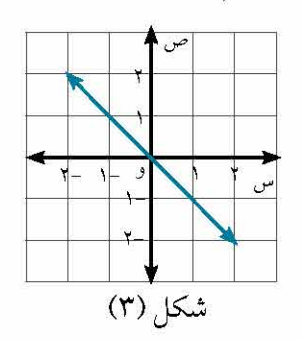
(١) اذكر ما إذا كان تماثل المنحنى حول محور السينات أو محور الصادات أو نقطة الأصل ثم فسِّر إجابتك.



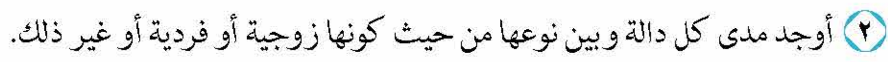
شكل (١)



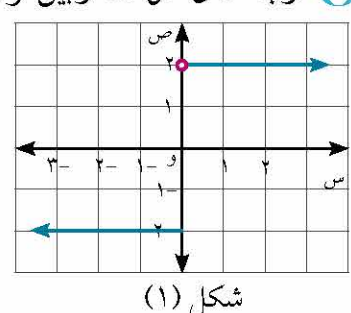
شكل (٢)



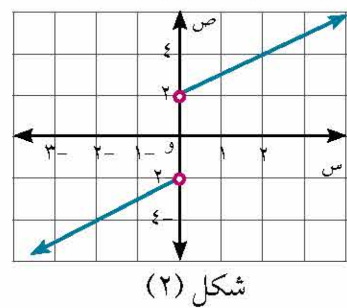
شكل (٣)



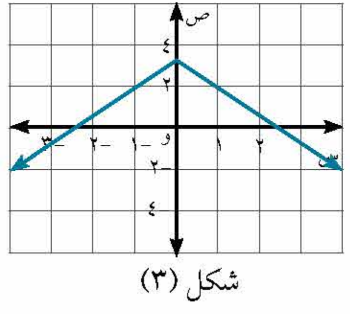
(٢) أوجد مدى كل دالة وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.



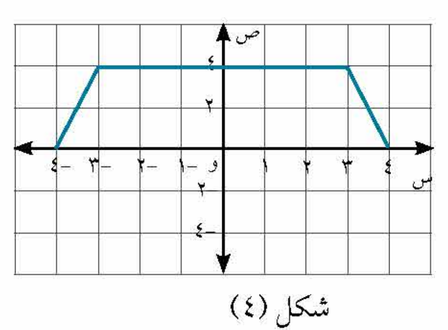
شكل (١)

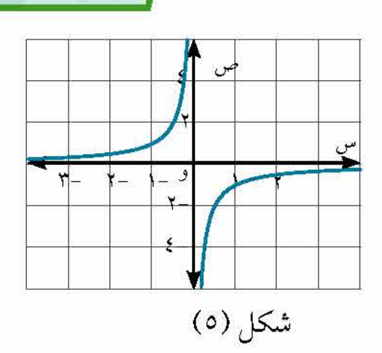


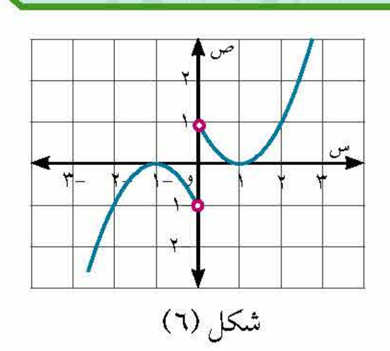
شكل (٢)



شكل (٣)


شكل (٤)


شكل (٥)


شكل (٦)

**٣** ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ د(س) = $س^٤ + س^٢ - ١$ ب د (س) = ٣ س - ٤ $س^٣$ جـ د (س) = $س^٣ - \frac{١}{س}$

د د(س) = $س^٢ - ٣س$ هـ د (س) = $\frac{س^٣ + ٢}{س - ٣}$ و د(س) = س حتا س

ز د(س) = $\sqrt{س^٢ + ٦}$ ح د(س) = $\frac{س^٢}{س + ١}$ ط د (س) = $(س^٢ + ١)^٣$

**٤** إذا كانت $د_١$، $د_٢$، $د_٣$ دوال حقيقية حيث $د_١(س) = س^٥$، $د_٢(س)$ = حاس، $د_٣(س) = ٥س^٢$،

فبين أى الدوال الآتية زوجية وأيها فردية وأيها غير ذلك

أ $د_١ + د_٢$ ب $د_١ + د_٣$ جـ $د_١ × د_٢$ د $د_٣ × د_٢$

**٥** إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = $(٣ - س)^٢$ ، ر(س) = $(٣ + س)^٢$

بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك.

أ د + ر ب د - ر جـ د . ر د $\frac{د}{ر}$

**٦** ارسم منحنيات كل من الدوال المعرفة كما يلى، ثم بين أى منها زوجية وأى منها فردية وأيها غير ذلك، وتحقق من ذلك جبريًا.

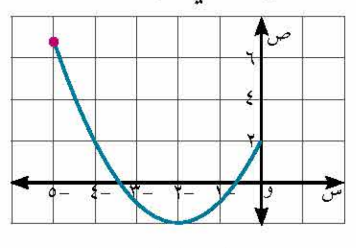
أ د(س) = $\begin{cases} ٢ & \text{عندما } س > ٠ \\ -٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

ب د (س) = $\begin{cases} -س & \text{عندما } س \geqslant ٠ \\ س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

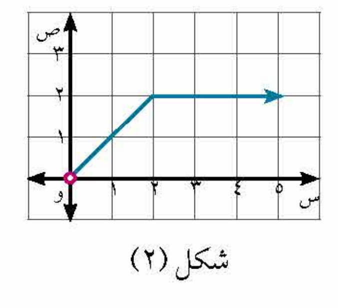
جـ د(س) = $\begin{cases} س - ١ & \text{عندما } س \geqslant ٠ \\ ٧س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

د د(س) = $\begin{cases} س + ١ & \text{عندما } س \geqslant ٠ \\ ١ - س & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

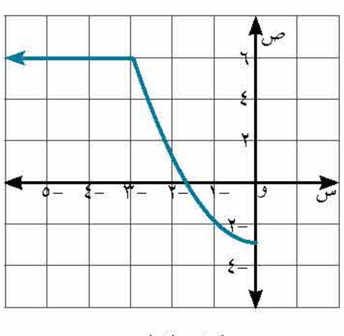
٧ أجب عن ما يلي من خلال الأشكال الآتية:



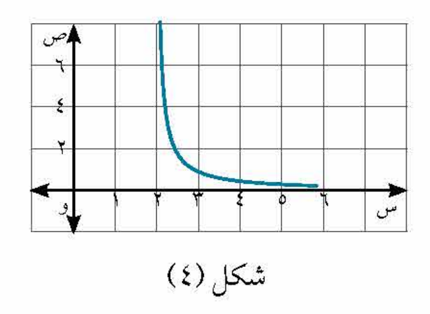
شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)



شكل (٤)

أولًا: أكمل رسم شكل (١) وشكل (٣) في كراستك، بحيث تصبح الدالة زوجية على مجالها.

ثانيًا: أكمل رسم شكل (٢) وشكل (٤) في كراستك، بحيث تصبح الدالة فردية على مجالها.

ثالثًا: حدد مجال ومدى الدالة فى كل حالة وبين أى الأشكال البيانية تمثل منحنى دالة احادية.

٨ في كل من الدوال المعرفة كما يلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا، مع توضيح السبب.

أ د(س) = ٣ س + ١

ب د (س) = $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{س - ٢}}$

جـ د(س) = $\text{س}^{٣}$ + ١

د د (س) = $\text{٢س}^{٢}$ - س - ٣

هـ د(س) = $\text{س}^{٤}$ + $\text{٢س}^{٢}$ + ١

٩ الربط بالصناعة: يعمل سعيد في مصنع لإنتاج المصابيح الموفرة للطاقة، فإذا كان يتقاضى ٨ جنيهات أجرًا عن كل ساعة عمل بالاضافة إلى ٠,٣ جنيهًا عن كل مصباح ينتج يوميًا.

أ اكتب قاعدة الدالة د التى تعبر عن أجر سعيد إذا كان يعمل ٧ ساعات يوميًا.

ب هل الدالة د أحادية؟ فسر إجابتك.

١٠ تفكير ابداعى: مثّل بيانيًا منحنى يحقق الشروط الآتية:

أ يمر بالنقط (٠ ، -٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٧) و يمثل دالة زوجية.

ب يمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (-٢ ، ١) ، (-٣ ، ٥) و يمثل دالة فردية.

# ١ - ٣ اطراد الدوال

*Monotonicity of Functions*

**سوف تتعلم**

- اطراد الدوال.
- استخدام البرامج الرسومية مثل (Geogebra) في رسم منحنى دالة

**المصطلحات الأساسية**

- اطراد. Monotony
- دالة تزايدية. Increasing Function
- دالة تناقصية. Decreasing Function
- دالة ثابتة. Constant Function

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

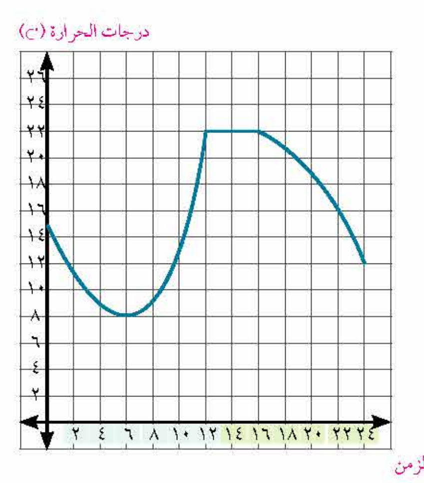
## فكر و ناقش

يوضح الشكل البياني المقابل درجات الحرارة المسجلة بمدينة القاهرة فى أحد الأيام ، لاحظ التغير فى درجات الحرارة بالنسبة للزمن، ثم حدد من الرسم:

أ فترات تناقص درجات الحرارة.

ب فترات تزايد درجات الحرارة

جـ فترات ثبات درجات الحرارة.




تساعدنا صفات منحنيات الدوال فى معرفة سلوك الدالة د وتحديد فترات تزايد أو تناقص أو ثبوت د(س) كلما زادت س وهو مايعرف باطراد الدالة.

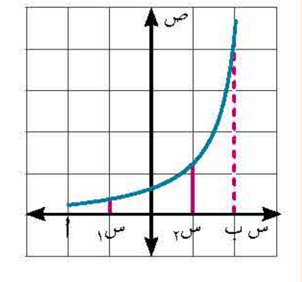
## تعلم

**تزايد الدالة:**

يقال للدالة د أنها تزايدية فى الفترة ]أ ، ب[

إذا كان لكل $س_١ ، س_٢ \in ]أ ، ب[$ حيث: $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) > د(س_١)$

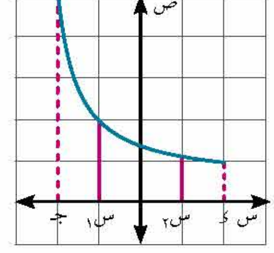


**تناقص الدالة:**

يقال للدالة د أنها تناقصية فى الفترة ]جـ ، ى[

إذا كان لكل $س_١ ، س_٢ \in ]جـ ، ى[$ حيث: $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) < د(س_١)$

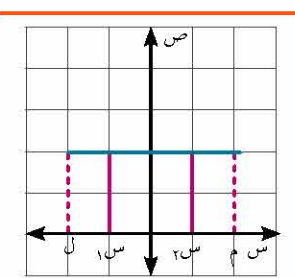


**ثبوت الدالة:**

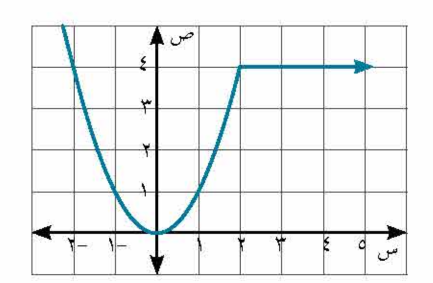
يقال للدالة د أنها ثابتة فى الفترة ]ل ، م[

إذا كان لكل $س_١، س_٢ \in ]ل ، م[$ حيث: $س_٢ > س_١$

فإن: $د(س_٢) = د(س_١)$



## مثال



(١) ابحث اطراد الدالة الممثلة فى الشكل البيانى المقابل.

**الحل**

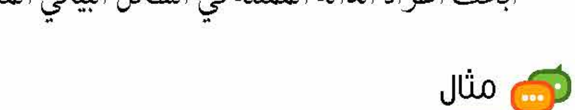
- الدالة تناقصية فى الفترة ]-∞، ٠[
- الدالة تزايدية فى الفترة ]٠، ٢[
- الدالة ثابتة فى الفترة ]٢،∞[

### حاول أن تحل

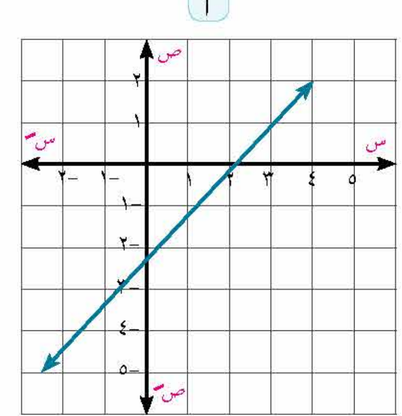
(١) فى الشكل المقابل:

ابحث اطراد الدالة الممثلة في الشكل البياني المقابل.

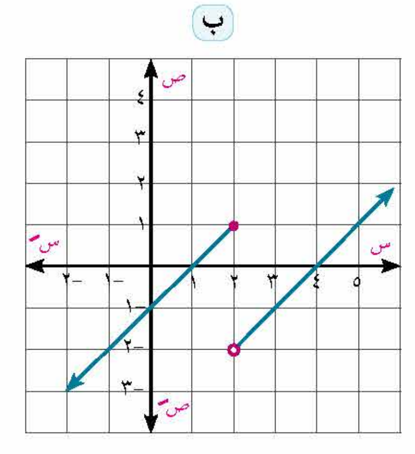
## مثال

(٢) يوضح كل شكل من الأشكال البيانية التالية منحنى الدالة د: س  ص ، حيث ص = د(س) استنتج من الرسم مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها.

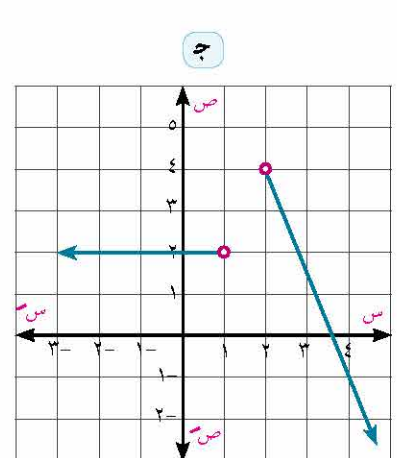
أ



ب



جـ



**الحل**

(أ) مجال د = ع = ]-∞، ∞[ ، مدى د = ]-∞، ∞[ الدالة تزايدية فى ]-∞ ، ∞[

(ب) مجال د = ]-∞ ، ٢] ∪ ]٢، ∞[ = ]-∞، ∞[

الدالة تزايدية فى ]-∞، ٢[ ، تزايدية أيضًا فى ]٢ ، ∞[ ، مدى الدالة = ع

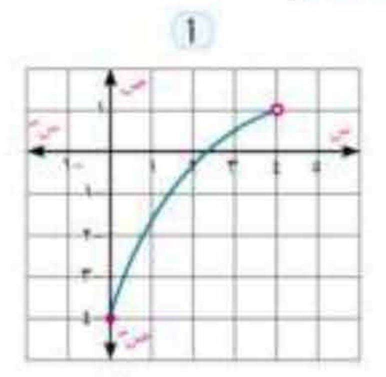
(جـ) مجال د= ]-∞ ، ١[ ∪ ]٢، ∞[ ، مدى د = ]-∞ ، ٤[

الدالة ثابتة فى ]-∞ ، ١[ ، وتناقصية فى ]٢ ، ∞[

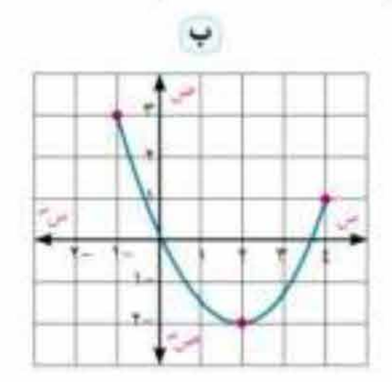
حاول أن تحل

(٢) في كل من الأشكال التالية استنتج مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها:

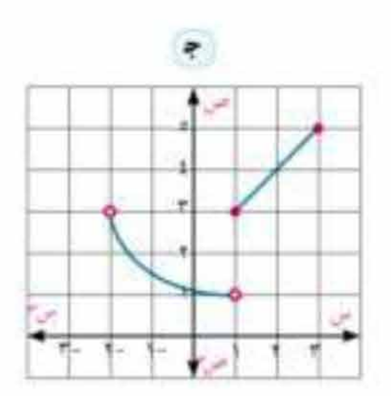
أ



ب



ج



تفكير ناقد: أي من الأشكال السابقة يمثل دالة إحادية ؟ فسر إجابتك

## استخدام البرامج الرسومية فى دراسة خواص الدوال

تتعدد البرامج الرسومية لتمثيل الدوال بيانيًا ، ومن أشهرها برنامج *GeoGebra* المجانى للتابلت أو الحاسوب.

### نشاط

**استخدم برنامج جيوجبرا في عمل التحويلات الهندسية للدوال**

باستخدام برنامج *GeoGebra* مثل بيانيًا الدالة د حيث: د(س) = س$^{٣}$ - ٣س + ٢ ، ومن الرسم:

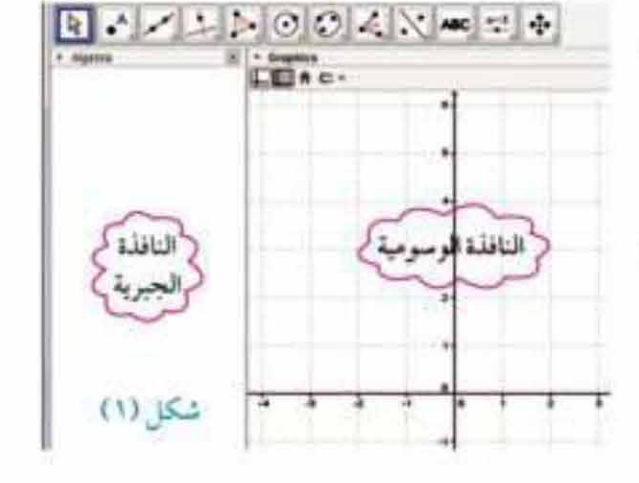
أ أوجد مجال ومدى الدالة.

ب ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

لتمثيل الدالة بيانيًا اتبع الخطوات التالية:

١- افتح نافذة الجبر والرسم البيانى من برنامج (GeoGebra)

ثم إضغط Graphics واختر لتصل إلى النافذة المبينة فى شكل (١).

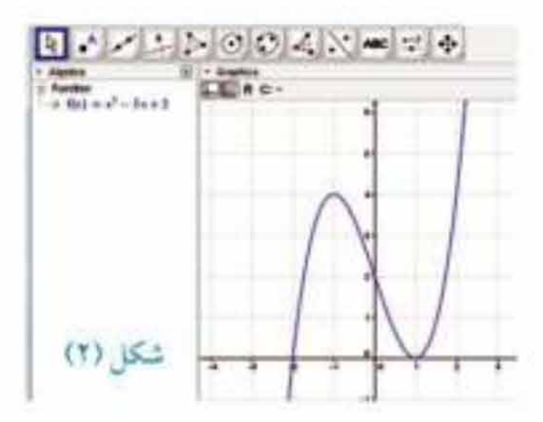



شكل (١)

٢- فى النافذة الجبرية اكتب قاعدة الدالة د(س) = س$^{٣}$ - ٣س + ٢ بمربع الادخال (input) على النحو التالى:




ثم اضغط فيظهر فى النافذة البيانية منحنى الدالة، وفى النافذة الجبرية قاعدة الدالة كما فى شكل (٢)

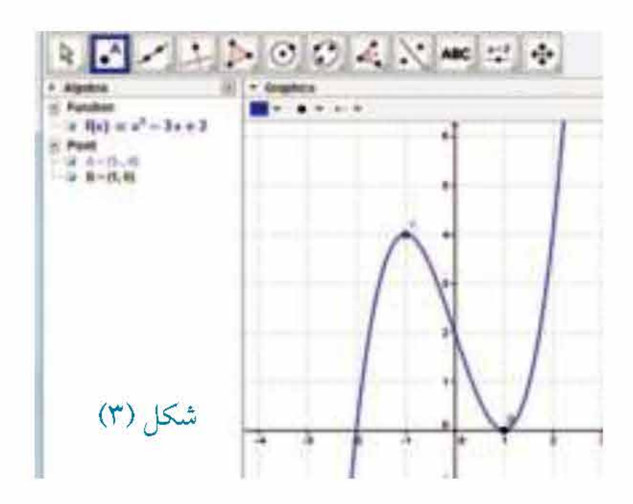


شكل (٢)



دار النصر للطباعة (هدلاين)

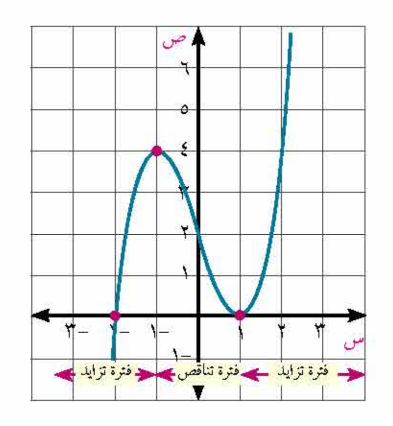
٣- لتحديد نقط على منحنى الدالة اختر من شريط الأدوات ثم نقطة جديدة من القائمة المنسدلة، حرك المؤشر حتى تصل إلى موضع النقطة المراد تحديدها على المنحنى واضغط إدخال لتظهر النقطة على المنحنى فى النافذة الرسومية كما يظهر إحداثيى النقطة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٣).


شكل (٣)

من الشكل البيانى للدالة نجد:

أ مجال د = ]- ∞، ∞[ ، مدى د= ]- ∞، ∞[

ب الدالة تزايدية فى ]- ∞ ، -١[ ، تناقصية فى ]-١ ، ١[ ، تزايدية فى ]١ ، ∞[
كما أن الدالة ليست زوجية وليست فردية.




**لاحظ:**

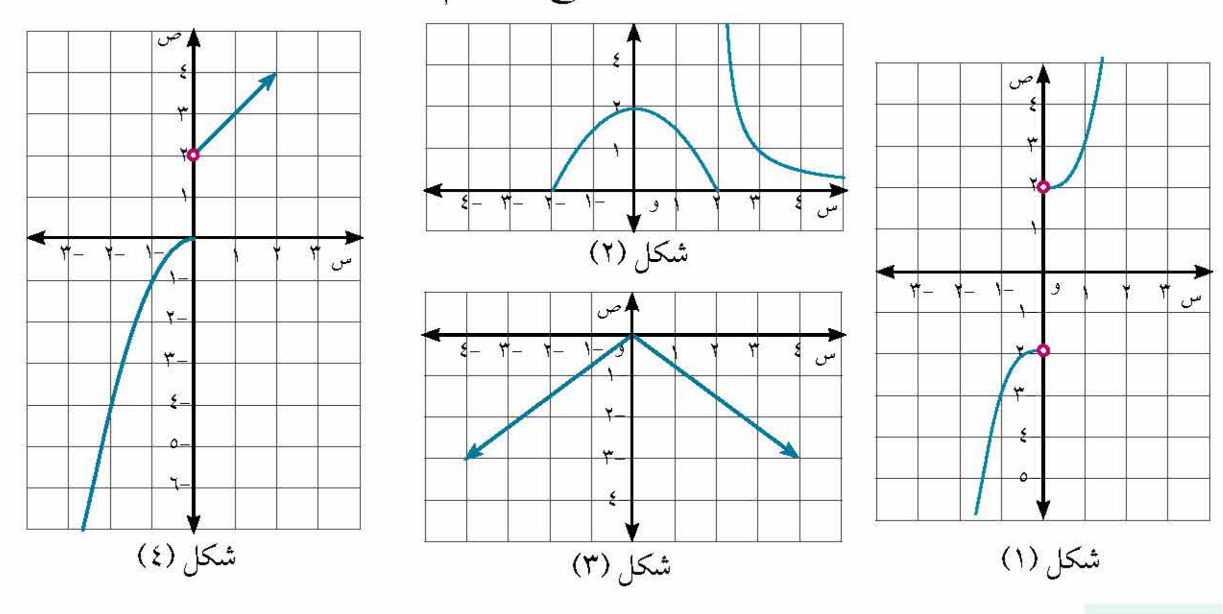
النقطة (٠، ٢) هى نقطة تماثل لمنحنى الدالة كما أن الدالة د ليست دالة أحادية.

**تدريب على النشاط**

باستخدام برنامج *Geogebra* ارسم منحنى الدالة د: د(س) = ٣س - س$^{٣}$
ومن الرسم ابحث اطراد الدالة ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غيرذلك.



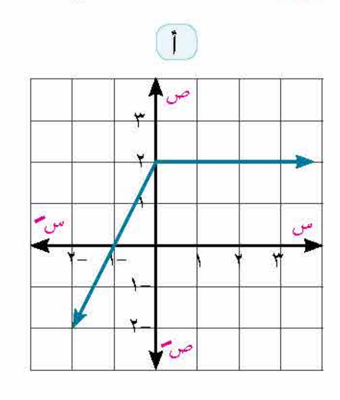

(١) الأشكال الآتية تمثل الشكل البيانى لبعض الدوال، استنتج من الرسم المدى وابحث الإطراد:



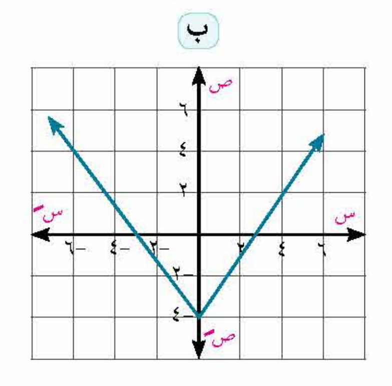
شكل (١) شكل (٢) شكل (٣) شكل (٤)

٢) حدد مجال كل من الدوال الممثلة بالأشكال الآتية ثم اكتب مدى الدالة وابحث اطرادها.

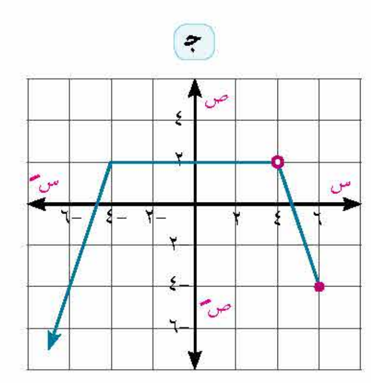
أ



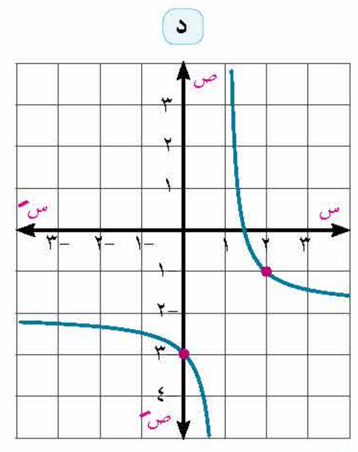

ب



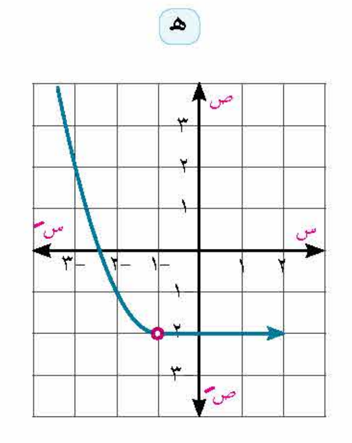

ج



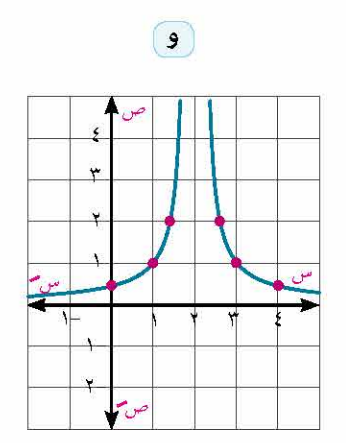

د




هـ




و




٣) اذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع

$$د(س) = \begin{cases} ٤ - س & \text{عندما } -٢ \leqslant س < ١ \\ س & \text{عندما } ١ \leqslant س \leqslant ٦ \end{cases}$$

أ) ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.

ب) هل د دالة احادية؟ فسر اجابتك.

٤) تفكير ابداعي

إذا كانت الدالة د في تزايد مستمر أو تناقص مستمر على مجالها هل تكون د دالة أحادية؟ فسر إجابتك.

٥) باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من ما يأتى ، ومن الرسم استنتج اطراد الدالة ومداها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ) $د(س) = س^{٢} - ٥$
ب) $د(س) = ٤ - س^{٢}$
ج) $د(س) = (س - ١)^{٢} + ١$

د) $د(س) = س^{٣}$
هـ) $د(س) = س^{٣} - ٣س$
و) $د(س) = \frac{-١}{س - ٢}$

# ١ - ٤ التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية

*Graphical Representation of functions, Geometriaal Transformations*

**سوف تتعلم**

- دوال كثيرة الحدود ( الدالة الخطية - الدالة التربيعية - الدالة التكعيبية )
- دالة المقياس (القيمة المطلقة )
- الدالة الكسرية
- استخدام التحويلات الهندسية للدالة د فى رسم المنحنيات
  - ص = د(س) + أ
  - ص = د(س + أ)
  - ص = د(س + أ) + ب
  - ص = - د(س)
  - ص = أ د(س)
  - ص = أ د(س +ب) + جـ
- التحويلات الهندسية لبعض الدوال المثلثية.

**المصطلحات الأساسية**

- تحويل. Transformation
- انتقال. Translation
- انعكاس. Reflection
- رأسى Vertical
- أفقى Horizontal
- خط تقارب Asymptutes

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

## الدالة كثيرة الحدود Polynomial Functions

سبق أن درست الدالة كثيرة الحدود التى قاعدتها على الصورة:

$$د(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + أ_٣ س^٣ + ........ + أ_ن س^ن$$

حيث: $أ_٠ ، أ_١ ، أ_٢ ، أ_٣ ،...... ، أ_ن \in ع ، أ_ن \neq ٠ ، ن \in ط$

وعلمت أن المجال والمجال المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية ع (أو مجموعة جزئية منها)، وتسمى هذه الدوال بدوال كثيرة الحدود من الدرجة ن، ودرجة كثيرة الحدود هى أعلى قوة يأخذها المتغير المستقل س.

**لاحظ:**

١- إذا كان $د(س) = أ_٠ ، أ_٠ \neq ٠$ فإن د تسمى كثيرة الحدود الثابتة.

٢- دوال كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تسمى دوالًا خطية ، ومن الدرجة الثانية تسمى دوالًا تربيعية ، ومن الدرجة الثالثة تسمى دوالًا تكعيبية.

٣- عند جمع أو طرح دوال قوى مختلفة وثوابت ، نحصل على دالة كثيرة الحدود.

٤- أصفار الدالة كثيرة الحدود هى الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيها مع محور السينات.

٥- تتساوى دالتا كثيرتا الحدود د، ر إذا كان لهما الدرجة نفسها وكانت معاملات قوى س المتناظرة فيهما متساوية.

### مثال

① إذا كان د ، ر كثيرتا حدود حيث $د(س) = (أ س + ٥)^٢$،
$ر(س) = ٩س^٢ + ٣٠ س + جـ - ٤$ ، وكان د(س) = ر(س) أوجد قيمتى أ ، جـ.

**الحل**

$د(س) = (أ س + ٥)^٢ = أ^٢ س^٢ + ١٠ أ س + ٢٥$

∵ د(س) = ر(س) ∴ معاملات قوى س المتناظرة متساوية

بمقارنة معامل س : ١٠أ = ٣٠ ∴ أ = ٣

بمقارنة الحد المطلق: جـ - ٤ = ٢٥ ∴ جـ = ٢٩

### حاول أن تحل

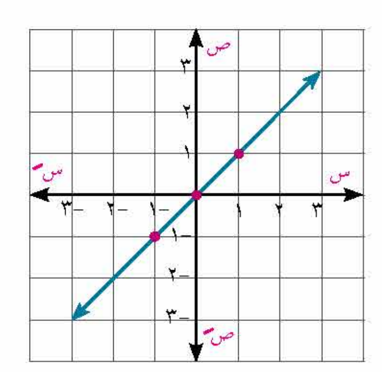
① إذا كان $د(س) = (أ + ٢ ب) س^٣ - جـ س + ٤$ ، $ر(س) = ٧س^٣ + ٥س + (أ - ب)$
أوجد قيم أ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س)

# رسم منحنيات الدوال *Graphs of Functions*

## أولًا: دوال كثيرة الحدود *Polynomial Functions*



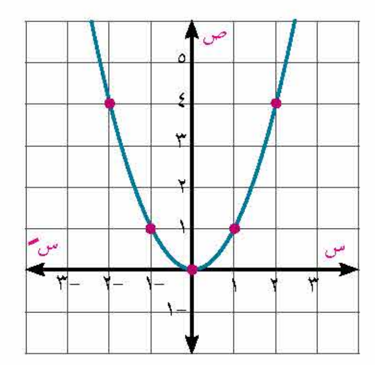

فيما يلي التمثيل البياني لبعض دوال كثيرات الحدود:




**١)** د(س) = س

الدالة د تربط العدد بنفسه، ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠، ٠)، وميله = ١

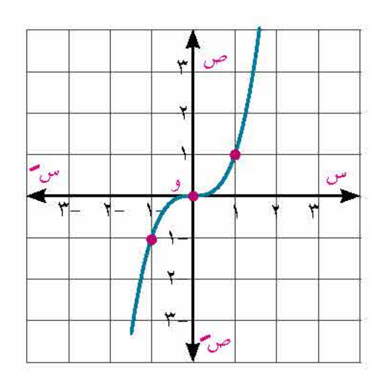
(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع )




**٢)** د(س) = س$^{٢}$

الدالة د تربط العدد بمربعه، ويمثلها منحنى مفتوح لأعلى ومتماثل حول محور الصادات ، ونقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)

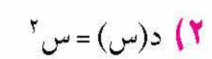
(تحقق من: مدى د = ع ، د زوجية ، د تناقصية فى ]-∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠،∞[ )




**٣)** د(س) = س$^{٣}$

الدالة د تربط العدد بمكعبه، ويمثلها منحنى نقطة تماثله هى (٠، ٠)

(تحقق من: مدى د= ع ، د فردية ، د تزايدية فى ع )




**٢** ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث:

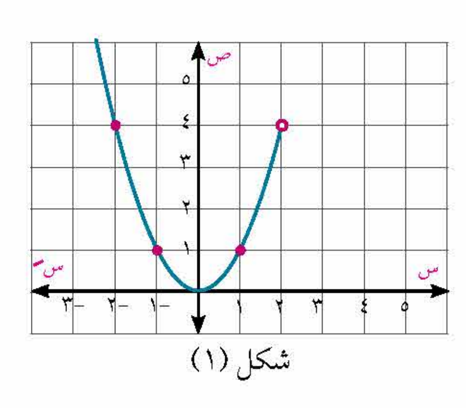
د(س) = { س$^{٢}$ عندما س < ٢ ، ٤ عندما س > ٢ }




**١)** عندما س < ٢ ، د(س) = س$^{٢}$

نرسم د(س) = س$^{٢}$ لكل س ]-∞ ، ٢[

مع وضع دائرة مفرغة عند النقطة (٢، ٤) كما فى شكل (١)




شكل (١)



**٢)** عندما س > ٢ ؛ د(س) = ٤

ترسم الدالة الثابتة د(س) = ٤ لكل س ]٢، ∞[

على نفس الشكل البيانى كما فى شكل (٢)

لاحظ أن مجال الدالة د = ع - {٢} ، ومدى د = [٠ ، ∞[

شكل (٢)

### حاول أن تحل

**٢** ارسم الشكل البياني للدالة د حيث:

د (س) = { س^٢ عندما س < ٠ ، س عندما س ≥ ٠

ثم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها.

## تعلم

### دالة المقياس (دالة القيمة المطلقة): *The Absolute Value Function*

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س|، س ∈ ع

وتعرف كما يلي:

د(س) = { س عندما س ≥ ٠ ، -س عندما س < ٠

لاحظ أن: |-٣| = |٣| = ٣ ، |٠| = ٠ ، $\sqrt{(-٢)^٢} = \sqrt{٢^٢} = ٢$

أى أن: |س| ≥ ٠ ، |-س| = |س| ، $\sqrt{س^٢}$ = |س|

الدالة د يمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ ، وميل الآخر = -١

(تحقق من: مدى د = [٠ ، ∞[ ، د زوجية ، د تناقصية فى ]-∞ ، ٠[ وتزايدية فى ]٠، ∞[ )

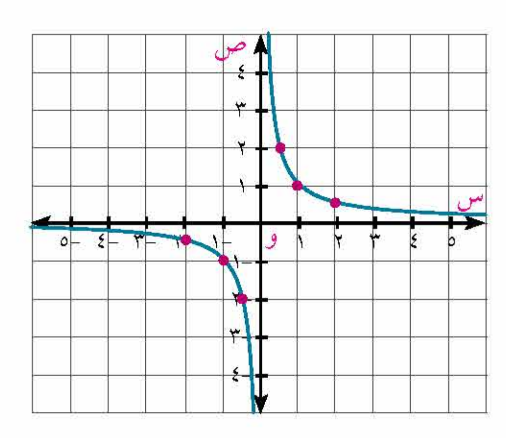
## تعلم

### الدالة الكسرية *Rational Function*

أبسط صورة للدالة الكسرية هى:

د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ∈ ع - {٠}

الدالة د تربط العدد بمعكوسه الضربى ، و يمثلها منحنى نقطة تماثله (٠، ٠) ويتكون من جزأين أحدهما يقع فى الربع الأول والآخر يقع فى الربع الثالث وكل جزء يقترب من المحورين ولايقطعهما (س = ٠، ص = ٠ خطا تقارب للمنحنى)



(تحقق من: مدى د = ع - {٠} ، د فردية ، د تناقصية فى ]-∞، ٠[ ، وتناقصية أيضًا فى ]٠، ∞[)

### حاول أن تحل

**٣** ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د(س) = { |س| عندما س ≤ ٠ ، $\frac{١}{س}$ عندما س > ٠

ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

## التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال *Transformations of Graphs*

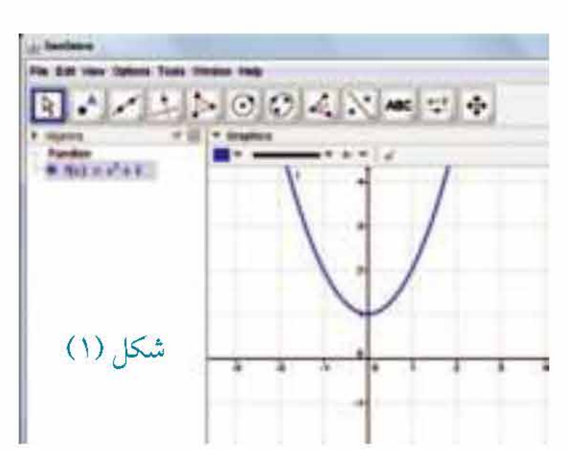
### أولًا: الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة *Vertical Translation*



اعمل مع زميل

**١)** ارسم منحنى الدالة د: د(س) = س$^{٢}$ باستخدام برنامج **Geogebra**

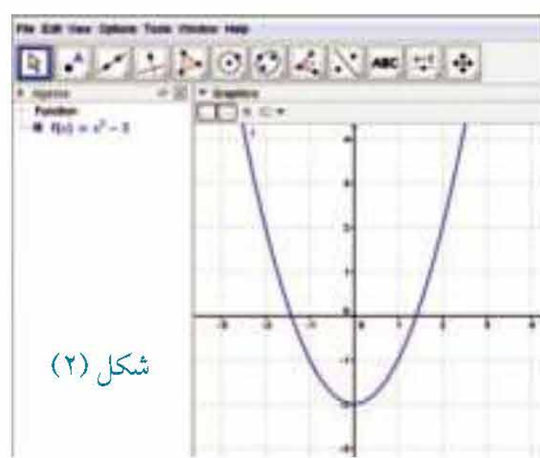
**٢)** ضع المؤشر على رأس منحنى الدالة واسحبه رأسيًّا لأعلى وحدة واحدة ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س$^{٢}$ + ١ كما فى شكل (١).



شكل (١)

**٣)** اسحب رأس منحنى الدالة إلى النقط (٠، ٢)، (٠، ٣) وسجل ملاحظاتك فى كل مرة.

**٤)** اسحب منحنى د(س) = س$^{٢}$ وحدتين رأسيًّا إلى أسفل ولاحظ تغير قاعدة الدالة لتعبر عن دالة جديدة قاعدتها د(س) = س$^{٢}$ - ٢ كما فى شكل (٢)



شكل (٢)

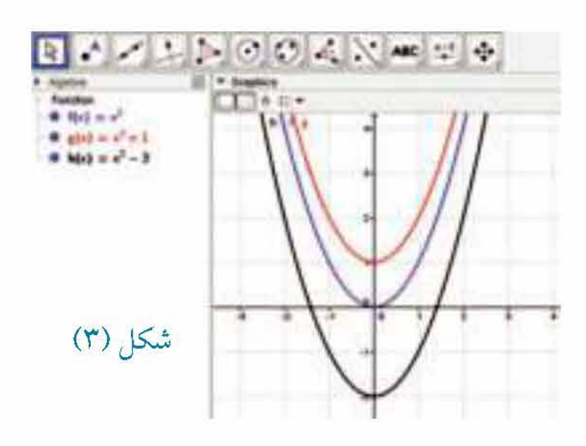
**فكر:** بين كيف يمكن رسم د(س) = س$^{٢}$ - ٥ باستخدام منحنى د(س) = س$^{٢}$؟

مما سبق نلاحظ أن: إذا كان:

د(س) = س$^{٢}$ ، ر(س) = س$^{٢}$ + ١ ، ق (س) = س$^{٢}$ - ٢ فإن:

**١)** منحنى ر(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات.

**٢)** منحنى ق(س) هو نفس منحنى د(س) بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى الاتجاه السالب لمحور الصادات.



شكل (٣)

**تفكير ناقد:** باستخدام منحنى د(س) = س$^{٣}$ بين كيف يمكن رسم منحنيات كل من:

أ) ر(س) = س$^{٣}$ + ٤     ب) ق(س) = س$^{٣}$ - ٥

### تعلم

#### رسم المنحنى ص = د(س) + أ

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = د(س) + أ هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و ص}}$ ، عندما أ > ٠ ، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ عندما أ < ٠ .

## مثال

③ يبين الشكل المقابل منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية

اكتب قاعدة كل من ر، ق حيث د(س) = |س|

**الحل**

∵ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

∴ ر(س) = د(س) - ٣

∵ د(س) = |س| ∴ ر(س) = |س| - ٣

، ∵ منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

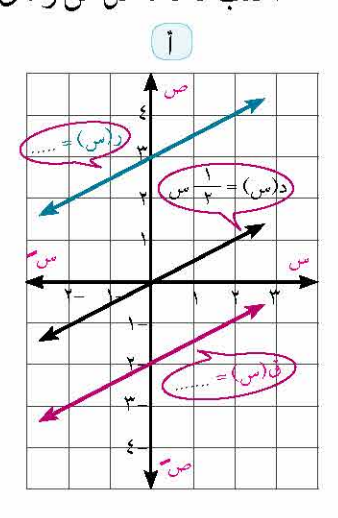
∴ ق(س) = د(س) + ٢

∵ د(س) = |س| ∴ ق (س) = |س| + ٢

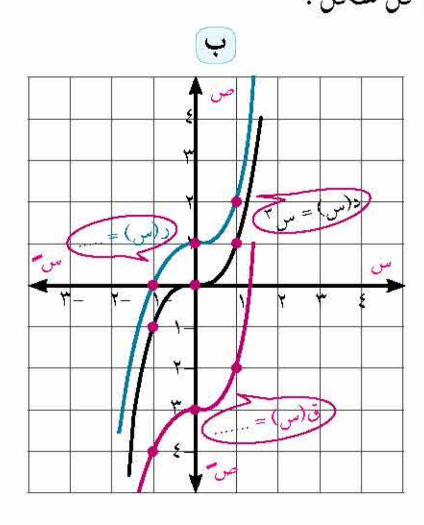
**حاول أن تحل**

④ تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ر، ق حيث كل من ر، ق صورة للدالة د بإزاحة رأسية، اكتب قاعدة كل من ر، ق في كل شكل.

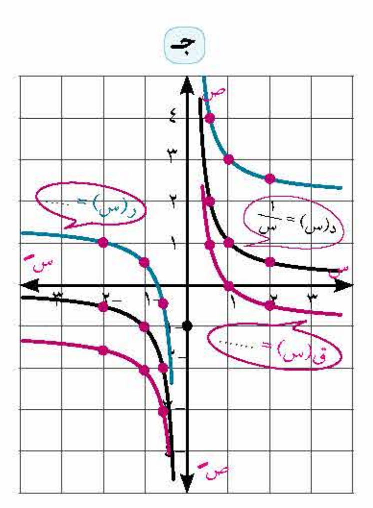
أ




ب




جـ

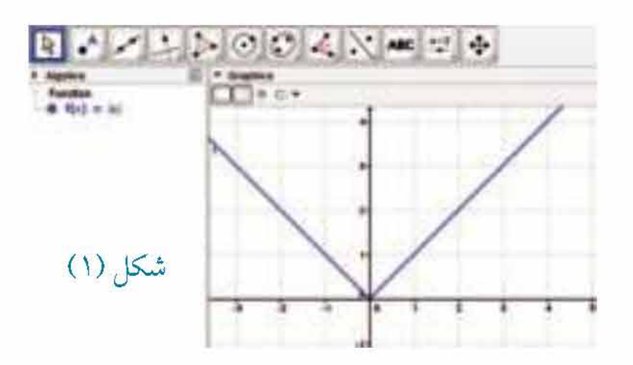



### ثانيًا: الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة *Horizontal Translation*

**عمل تعاوني**

**اعمل مع زميل:**

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = |س| مستخدمًا برنامج *Geogebra* بكتابة قاعدة الدالة في مربع الإدخال على النحو التالي: abs(x) ثم اضغط إدخال فيظهر منحنى الدالة في النافذة البيانية وقاعدتها f(x)=|x| في النافذة الجبرية كما في شكل (١)



شكل (١)

**٢)** اسحب منحنى الدالة أفقيًا فى الاتجاه الموجب لمحور السينات بعدد من الوحدات ولاحظ تغير قاعدة الدالة فى النافذة الجبرية كما فى شكل (٢)

شكل (٢)

**٣)** اسحب منحنى الدالة أيضًا فى الاتجاه السالب لمحور السينات بعدد من الوحدات كما فى شكل (٣)، ماذا تلاحظ؟

شكل (٣)

**فكر:** بين كيف ترسم منحنيا الدالتين ر ، ق باستخدام منحنى الدالة د حيث: د(س) = |س|، ر(س) = |س - ٥| ، ق(س) = |س + ٤|.



## تعلم

رسم المنحنى ص = د (س + أ)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى، ص = د(س + أ) هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة قدرها أ من الوحدات فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$ عندما يكون أ < ٠، وفى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ عندما يكون أ > ٠ .

**لاحظ:** فى الشكل المقابل: د(س) = |س|:

**١)** منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overrightarrow{\text{و س}}$

∴ ر(س) = |س - ٣| ونقطة بدء الشعاعين (٣، ٠)

**٢)** منحنى الدالة ق هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

∴ ق(س) = |س + ٢| ، نقطة بدء الشعاعين (-٢ ، ٠)

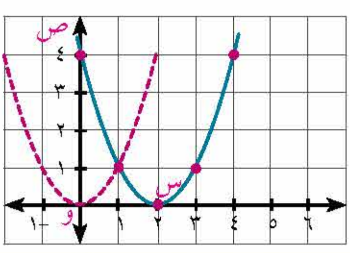
## مثال

**٤)** استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

**أ** ر(س) = $(س - ٢)^٢$  **ب** ع (س) = $(س + ٣)^٢$

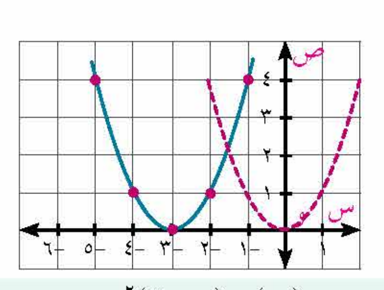
الحل

أ



➤ منحنى ر (س) = $(س - ٢)^٢$ هو منحنى د(س) = $س^٢$ بإزاحة وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور السينات وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٢،٠).

ب



➤ منحنى ع (س) = $(س + ٣)^٢$ هو منحنى د(س) = $س^٢$ بإزاحة ٣ وحدات في الاتجاه السالب لمحور السينات، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (-٣ ، ٠).

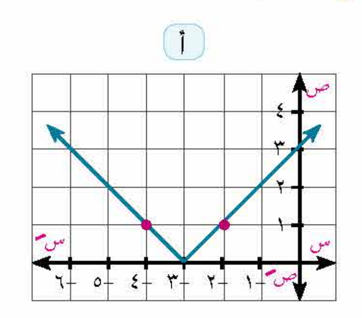
## حاول أن تحل

(٥) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

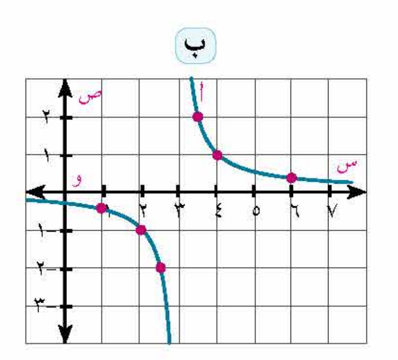
أ ر(س) = $(س + ٤)^٢$ ب ع (س) = $(س - ٣)^٢$

(٦) اكتب قاعدة الدالة د الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية:

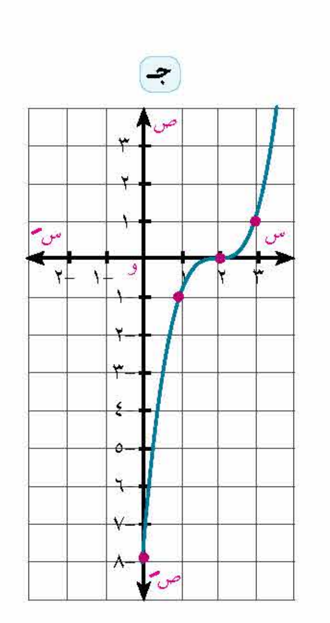
أ



ب



جـ



تفكير ناقد: إذا كان د(س) = $س^٢$ ، بين كيف يمكن رسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = $(س - ٣)^٢ + ٢$

**رسم المنحنى ص = د(س + أ) + ب**

مما سبق نستنتج أن: المنحنى ص = د(س + أ) + ب هو نفس منحنى ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها أ من الوحدات (في اتجاه $\overleftarrow{وس}$ عندما أ > ٠ ، وفي اتجاه $\overleftarrow{وس'}$ عندما أ < ٠) ، ثم إزاحة رأسية قدرها ب من الوحدات (في اتجاه $\overleftarrow{وص}$ عندما ب > ٠ ، وفي اتجاه $\overleftarrow{وص'}$ عندما ب < ٠)

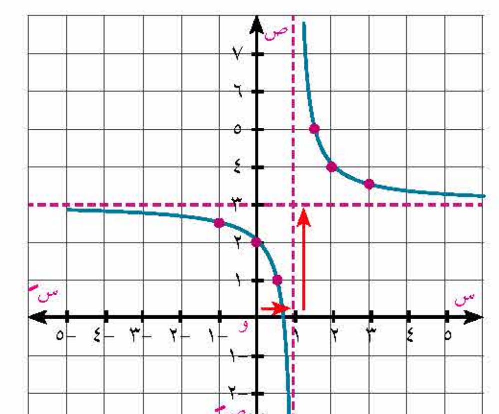
## حاول أن تحل

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع حيث:

أ ر(س) = $(س + ٢)^٢ - ٤$ ب ع (س) = $(٣ - س)^٢ - ١$

## مثال

٥ ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها:



### الحل

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$

بإزاحة قدرها وحدة واحدة فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ (أ = -١ < ٠)، ثم

إزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ وتكون نقطة تماثل

منحنى الدالة ر هى النقطة (١، ٣)، مدى ر = ح - {٣}

اطراد الدالة ر:

ر تناقصية فى ] -∞، ١[ ، وتناقصيه أيضًا فى ] ١ ، ∞ [

**تفكير ناقد:** هل يمكن القول بأن د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٣ تناقصية على مجالها؟ فسر إجابتك.

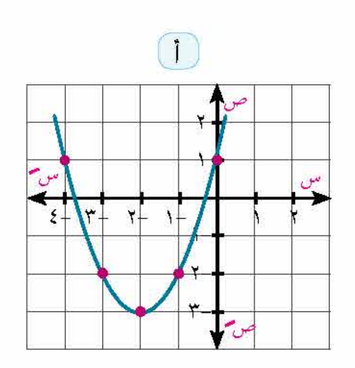
## حاول أن تحل

٨ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ ، لتمثيل كل من:

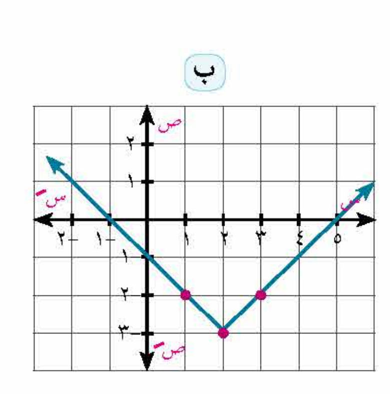
أ ر(س) = $\frac{١}{س + ٢}$ + ١ ب ق (س) = $\frac{٢ س - ٣}{س - ٢}$

٩ اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانيًا بالأشكال التالية :

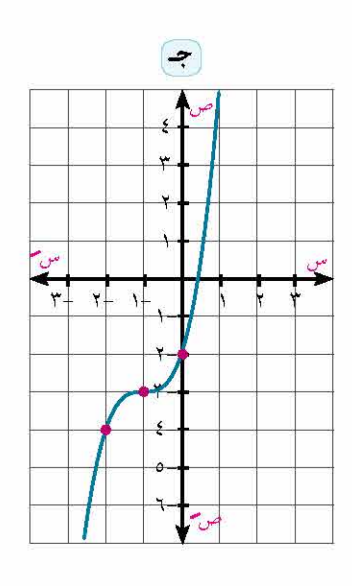
أ



ب



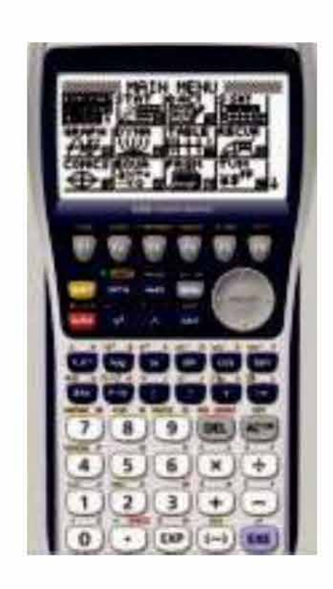
جـ






## استخدام الحاسبة البيانية فى رسم الدوال

لاستخدام الحاسبة البيانية فى رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = س$^{٢}$ + ٤س + ١
اتبع الخطوات التالية:

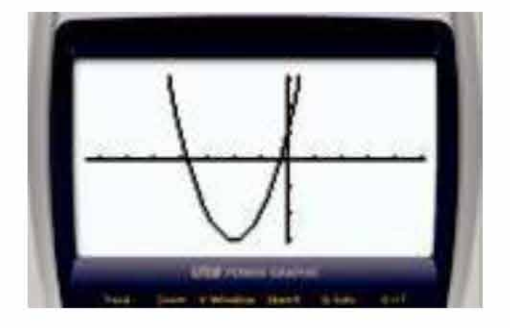


١) افتح الحاسبة واضغط MENU ثم تحرك بالأسهم على الشاشة و إختر *GRAPH*، اضغط EXE والذى يعد مفتاح الإدخال لتظهر لك نافذة الكتابة.




٢) اكتب عند Y١ فى نافذة الكتابة الدالة المراد رسمها حيث يستخدم مفتاح T,θ,X لكتابة المتغير x ولذلك اضغط المفاتيح التالية:

إبدأ ← T,θ,X   $x^2$   +   4   T,θ,X   +   1



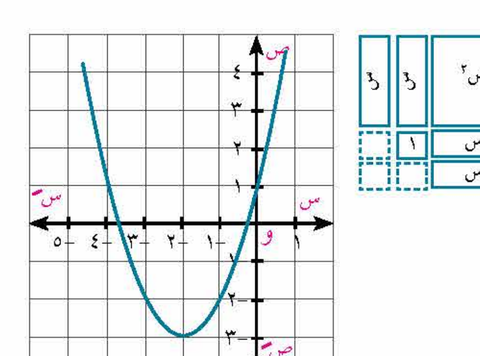
٣) لرسم الدالة اضغط EXE ◯ EXE ← إبدأ
فتظهر النافذة الرسومية كما فى الشكل المقابل.

٤) استخدم مفتاح ◯ في النافذة الرسومية لدراسة الدالة.

**لاحظ أن:**

د(س) = س$^{٢}$ + ٤س + ١ بإكمال المربع
= (س$^{٢}$ + ٤س + ٤) - ٣
= (س + ٢)$^{٢}$ - ٣

أى أن منحنى الدالة د (المعطاه) هو نفس منحنى الدالة ر حيث
حيث ر(س) = س$^{٢}$ بإزاحة قدرها ٢ وحدة فى اتجاه و س← ، ثم ٣ وحدات فى اتجاه و ص← ويمثله الرسم المقابل.

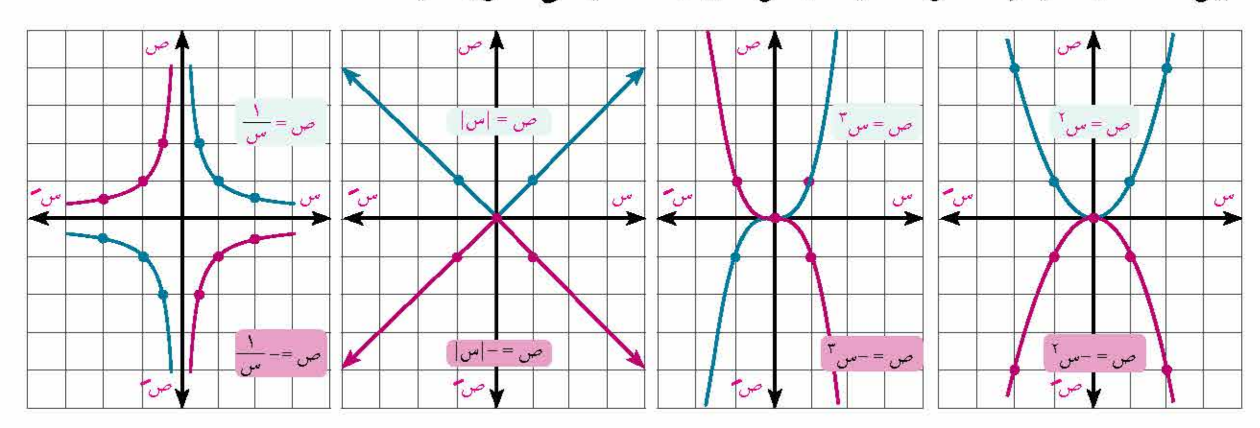


تطبيق: باستخدام الحاسبة الرسومية ارسم منحنى الدالة د

حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٤ ومن الرسم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها.

**ثالثًا: انعكاس منحنى الدالة فى محور السينات**

تبين الأشكال التالية إنعكاس منحنيات بعض الدوال الأساسية فى محور السينات.




ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟



## تعلم

رسم المنحنى ص = - د(س)

لأى دالة د، يكون المنحنى ص = - د(س) هو نفس منحنى ص = د(س) بانعكاس فى محور السينات

### مثال

**استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال**

(٦) باستخدام منحنيات الدوال الاساسية ارسم منحنيات الدوال ر ، ق، ع حيث:

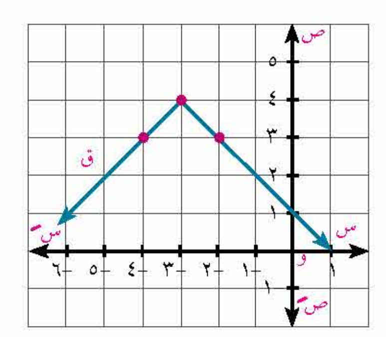
أ ر(س) = -(س - ٣)$^{٢}$     ب ق (س) = ٤ - |س+٣|

جـ ع (س) = ٢ - $\frac{١}{س - ٣}$

الحل

أ منحنى ر(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = س$^{٢}$ فى محور السينات ، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، وتكون نقطة رأس المنحنى هى (٣، ٠) والمنحنى مفتوح إلى أسفل.

ب منحنى ق(س) هو إنعكاس لمنحنى د(س) = |س| فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٤ وحدات فى اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$ ، وتكون نقطة بدء الشعاعين هى النقطة (-٣، ٤) والمنحنى مفتوح لأسفل.



ج منحنى ع(س) هو إنعكاس لمنحنى $د(س) = \frac{١}{س}$

فى محور السينات، ثم إزاحة أفقية قدرها ٣ وحدات

فى اتجاه $\overleftarrow{و س}$ ، و إزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة

فى اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ ، وتكون نقطة تماثل المنحنى هى (٣، ٢)

**٩ حاول أن تحل**

**١٠** في كل ممايأتي ارسم منحنى الدالة ر حيث:

أ $ر(س) = ٣ - (س + ١)^{٢}$ ب $ر(س) = -(س - ٣)^{٣}$

ج $ر(س) = ٣- |س - ٥|$

ثم تحقق من صحة الرسم باستخدام أحدالبرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية.

## مثال
### استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال

**٧** مستخدمًا التحويل المناسب ، ارسم منحنيى الدالتين ر ، ق حيث $ر(س) = ٤ - س^{٢}$ ، $ق(س) = |٤ - س^{٢}|$

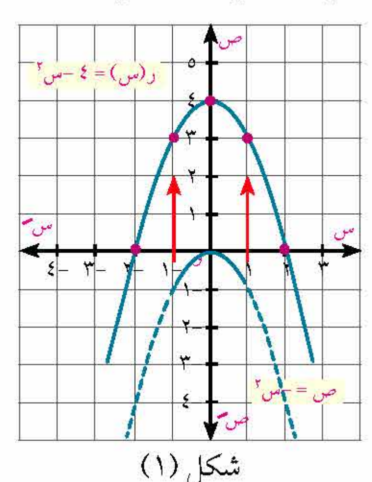
**الحل**

أولًا: رسم منحنى الدالة ر

منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د: $د(س) = س^{٢}$ بانعكاس

في محور السينات، ثم إزاحة رأسية مقدارها ٤ وحدات في

اتجاه $\overleftarrow{و ص}$ ويوضحه شكل (١)



شكل (١)

ثانيًا: رسم منحنى الدالة ق

$\because$ $ق(س) = |٤ - س^{٢}|$ $\therefore$ $ق(س) = |ر(س)|$

فيكون الإحداثى الصادى لجميع نقط منحنى الدالة ق موجبًا حيث:

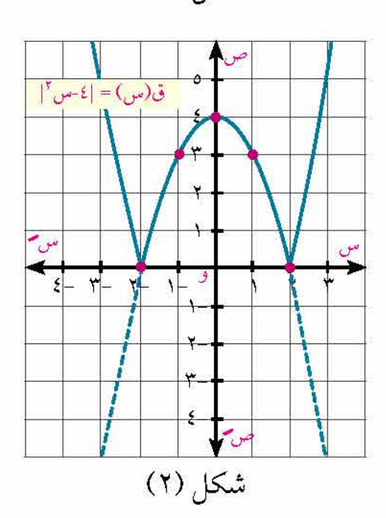
$ص = |ر(س)|$

$$\therefore ص = \begin{cases} ر(س) & \text{عندما } ر(س) \geqslant ٠ \\ -ر(س) & \text{عندما } ر(س) < ٠ \end{cases}$$

أى أن منحنى الدالة ق يقع فى الربعين الأول والثانى فقط وهذا يعنى

إنعكاسًا لمنحنى الدالة ر لكل ر(س) < ٠ فى محور السينات

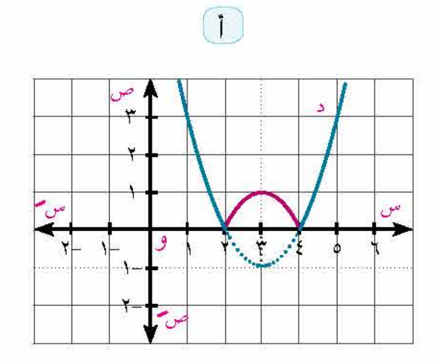
كما فى شكل (٢).



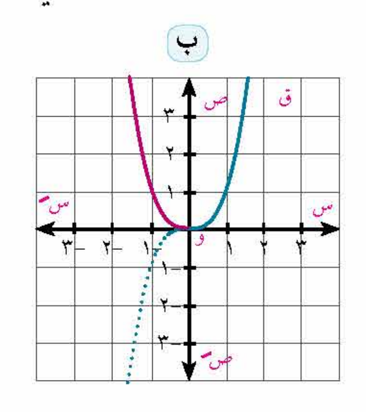
شكل (٢)

## حاول أن تحل

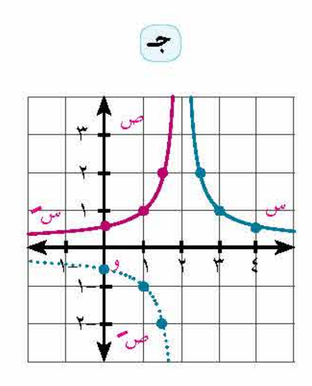
(١١) تبين الأشكال التالية منحنيات الدوال د، ق، ر اكتب قاعدة الدالة في كل شكل:



أ



ب



جـ

## رابعًا: تمدد منحنى الدالة: *Expanding of graphs*



### عمل تعاونى

رسم منحنى ر(س) = أ د (س)

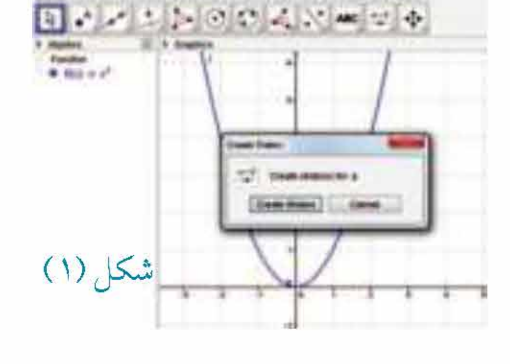
اعمل مع زميل.

١) ارسم منحنى الدالة د: د(س) = $س^٢$ باستخدام برنامج *Geogebra*
وفى مربع الإدخال اكتب قاعدة الدالة ر على النحو التالي:

ابدأ ← a ◄ ► x ^ 2 ↵

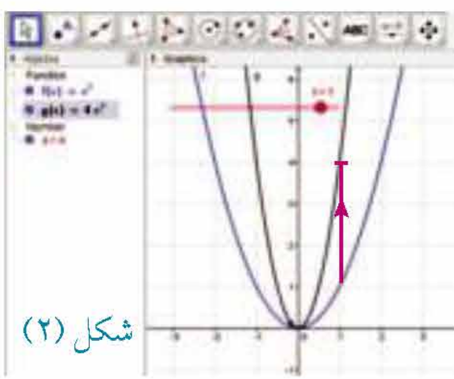
لتظهر لك نافذة جديدة (شكل ١)

إختر منها *Create sliders*



شكل (١)

٢) استخدم مؤشر قيم a لاختيار قيم أخرى لها حيث a>١
ولاحظ حركة منحنى الدالة ر بالنسبة لمنحنى الدالة د
لكل س ∈ ع كما في شكل (٢) وعندما ١ > a
كما في شكل (٣) ماذا تلاحظ ؟ وماذا تستنتج؟

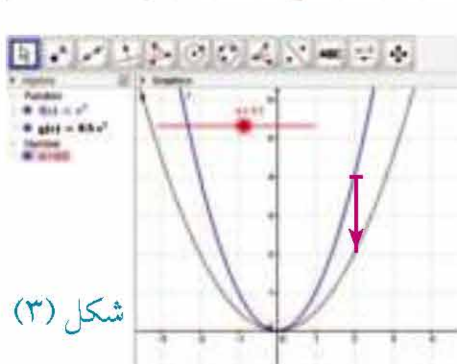


شكل (٢)

### تعلم

رسم المنحنى ص = أ د (س)

لأى دالة د ؛ يكون المنحنى ص = أ د(س) هو تمدد رأسى لمنحنى ص = د(س) إذا كان أ > ١،
وإنكماش رأسي لمنحنى ص = د (س) إذا كان . < أ < ١



شكل (٣)

**رسم منحنى الدالة ر: ر(س) = أ د (س + ب) + جـ**

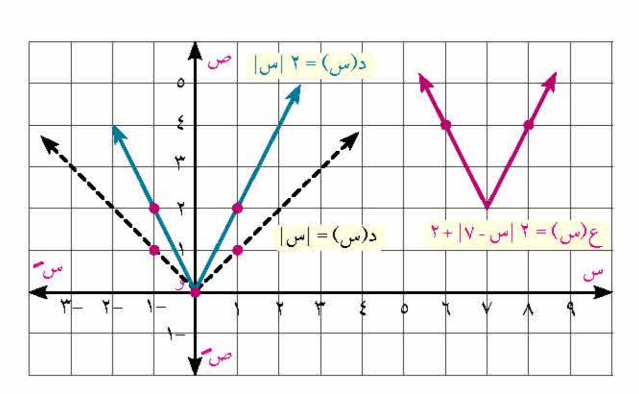
مثال

**استخدام التحويلات الهندسية فى رسم منحنيات الدوال**

(٨) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل من الدالتين ر ، ع:

أ ر(س) = ٢ |س| ب ع(س) = ٢|س - ٧| + ٢

الحل




أ منحنى ر(س) هو تمدد رأسى لمنحنى الدالة د

معاملةأ = ٢ > ٠ وعلي ذلك فإن:

لكل (س ، ص) ∈ بيان د

يكون (س، ٢ ص) ∈ بيان ر

ب منحنى ع(س) هو نفس منحنى ر(س) بإزاحة أفقية قدرها ٧ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$ ، وإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و ص}}$

حاول أن تحل

(١٢) استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س$^{٢}$ لتمثيل الدالتين ر ، ع :

أ ر(س) = - $\frac{١}{٢}$س$^{٢}$ ب ع(س) = ٢ - $\frac{١}{٢}$ (س - ٥)$^{٢}$

تحقق من صحة الرسم باستخدام أحد البرامج الرسومية أو الحاسبة البيانية ثم حدد مدى الدالة ع وابحث اطرادها.



نشاط

**تطبيق التحويلات الهندسية التى درستها فى الدوال الجبرية السابقة على دوال الجيب وجيب التمام؟**

## الدوال المثلثية (منحنى دالة الجيب) *Trigonometric functions*

### أولًا: الإزاحة في اتجاه محور السينات *First: Translation on X – axis*

١) استخدم برنامج جيوجبرا (GeoGebra) وأعد البرنامج بحيث يكون التدريج على محور السينات بالراديان، وذلك بأن تضغط بالفأرة (كليك يمين)، وتختار منها فى آخر سطر محور الفاصلات (السينات) x، ثم تختار منه نظام التدريج ($\pi$).

٢) فى أسفل البرنامج (كتابة الأوامر) اكتب الأمر: sin (x) ثم اضغط (enter) فتعطى لك شكل المنحنى الأحمر، تستطيع التحكم فى اللون وسمك المنحنى، وذلك بالضغط على المنحنى بالفأرة (كليك شمال)، فيظهر فى أعلى النافذة اللون وسمك الخط وشكل الخط ∙ منقط، شرطى، متصل ،...).

٣) بنفس الطريقة السابقة اكتب الأمر: sin (x + ($\pi$/3)) أى: ص = جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ثم اضغط (enter) ولون هذا المنحنى بلون آخر.

**٤)** قارن بين المنحنيين. ماذا تلاحظ؟

من الرسم نستنتج أن:

تم إزاحة منحنى دالة الجيب أفقيًّا جهة اليسار على محور السينات بمقدار يساوى $\frac{\pi}{٣}$ (كما في الدوال الحقيقية)، ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [ - ١ ، ١] وهو نفس مدى الدالة جا س ، كما نلاحظ أن الدالة جا (س + $\frac{\pi}{٣}$) ليست زوجية وليست فردية؛ لأنه لايوجد تماثل لمنحناها حول محور الصادات أو نقطة الأصل.

## فكر:

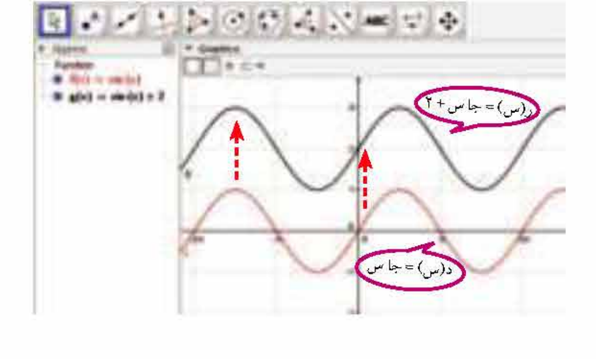
➤ ماذا تتوقع أن يكون اتجاه الإزاحة السينية إذا كانت قاعدة الدالة هي: جا (س - $\frac{\pi}{٣}$).

## ثانيا: الإزاحة في اتجاه محور الصادات — *Second: Translation on Y –axis*

**١)** ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = جا س كما سبق.

**٢)** ارسم منحنى الدالة ر حيث ر(س) = جا س + ٢

بلون آخر وقارن بين شكل المنحنيين. ماذا تلاحظ؟




من الرسم نستنتج أن

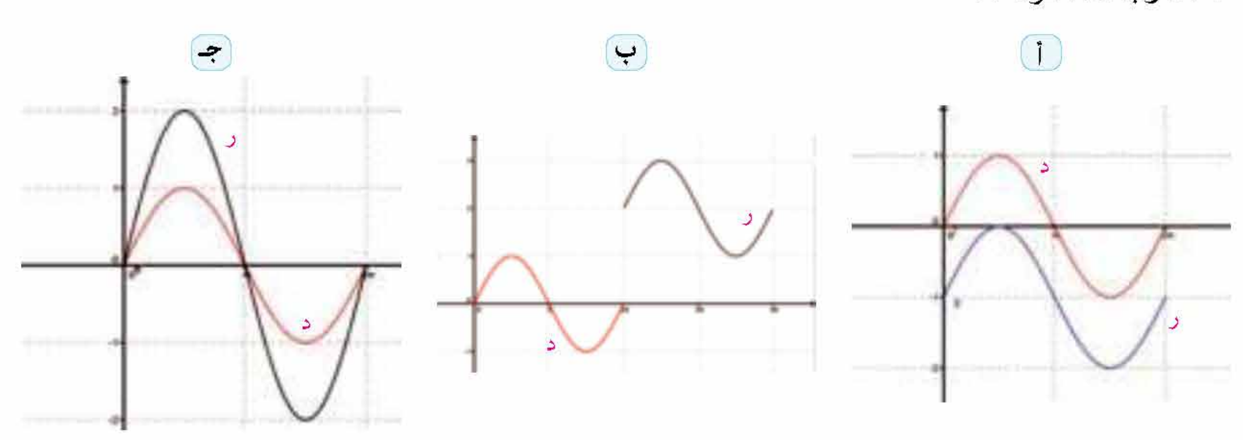
منحنى الدالة الثانية هو نفسه منحنى الدالة جا س ، بعد إزاحته بمقدار وحدتين لأعلى.

ونلاحظ أن مدى الدالة الثانية هو [١ ، ٣] ؛ لأنه تم إزاحته بمقدار وحدتين في الاتجاه الموجب لمحور الصادات عن الدالة الأولى، وأن الدالة جا س + ٢ ليست زوجية وليست فردية.

## تفكير ناقد:

في كل من الأشكال الآتية:

صف التحويلات الهندسية لمنحنى الدالة د والتي ترسم منحنى الدالة ر، ثم اكتب قاعدة الدالة ر بدلالة د وحدد مداها وابحث اطرادها.






(١) حدد قيم أ ، ب ، جـ التى تجعل د(س) = ر(س) حيث

د(س) = (أ + ب) س$^{٣}$ + ٣س - ٢ ، ر(س) = ٥س$^{٣}$ + (أ + جـ) س + ب

(٢) ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ) د(س) = { |س| عندما س ⩽ ٠ ، س$^{٢}$ عندما س > ٠ }

ب) د(س) = { ٤ عندما س < -٢ ، س$^{٢}$ عندما س ⩾ -٢ }

جـ) د(س) = { س$^{٣}$ عندما س < ١ ، ١ عندما س > ١ }

د) د(س) = { $\frac{١}{س}$ عندما س < ٠ ، |س| عندما س > ٠ }

**اختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة:**

(٣) منحنى ر(س) = س$^{٢}$ + ٤ هو نفس منحنى د(س) = س$^{٢}$ بإزاحة مقدارها ٤ وحدات في اتجاه:

أ) و س ب) و س َ جـ) و ص د) و ص َ

(٤) منحنى ر(س) = |س + ٣| هو نفس منحنى د(س) = |س| بإزاحة مقدارها ٣ وحدات في اتجاه:

أ) و س ب) و س َ جـ) و ص د) و ص َ

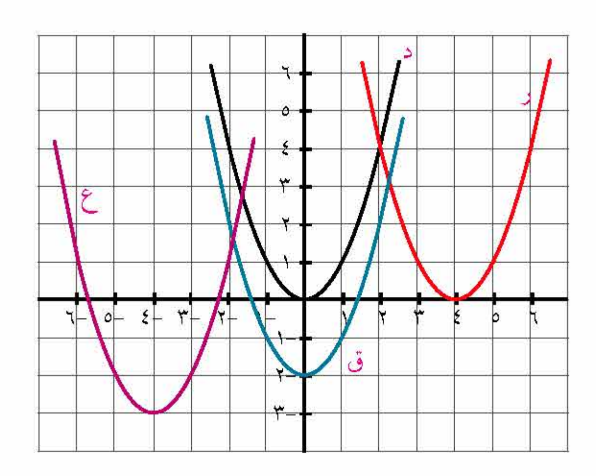
(٥) نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = (٢ - س)$^{٢}$ + ٣ هي:

أ) (٢، ٣) ب) (٢، -٣) جـ) (-٢، ٣) د) (-٢، -٣)

(٦) نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س - ٣}$ + ٤ هي:

أ) (٣، -٤) ب) (-٣، -٤) جـ) (٣، ٤) د) (-٣، ٤)

(٧) رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = س$^{٢}$ ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات كما فى الشكل المقابل.




اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

➤ ر ، ق ، ع

**٨** فى الشكل المقابل: رسم منحنى الدالة د، حيث د(س) = $س^{٣}$ ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

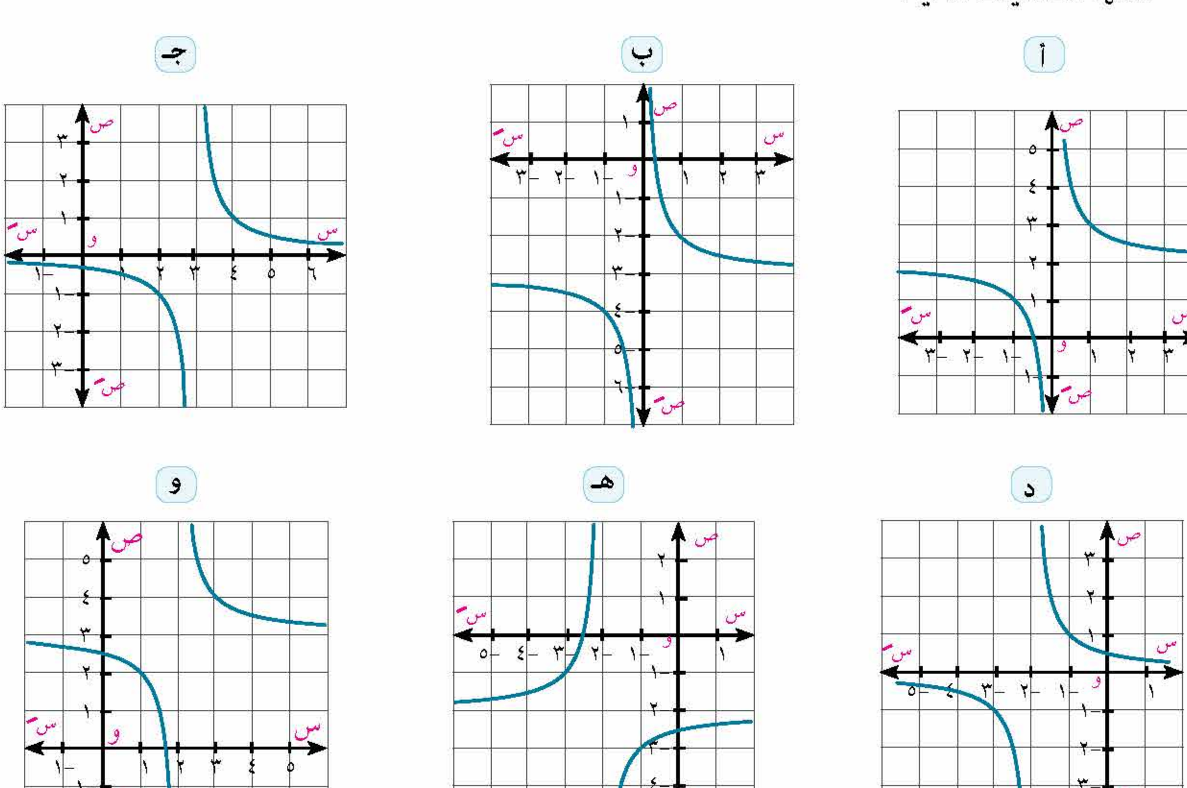
➤ ر، ق، ع

**٩** رسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س|
ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات
كما فى الشكل المقابل.

اكتب قاعدة كل من الدوال الآتية:

➤ ر، ق، ع

**١٠** رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:



**(١١)** استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س$^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًّا.

أ) د$_{١}$(س) = س$^{٢}$ − ٤   ب) د$_{٢}$(س) = س$^{٢}$ + ١   ج) د$_{٣}$(س) = (س + ١)$^{٢}$

د) د$_{٤}$(س) = (س − ٣)$^{٢}$   هـ) د$_{٥}$(س) = (س − ١)$^{٢}$ - ٢   و) د$_{٦}$(س) = (س + $\frac{٣}{٢}$)$^{٢}$ - $\frac{١}{٢}$

**(١٢)** استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانيًّا:

أ) د$_{١}$(س) = |س| + ١   ب) د$_{٢}$(س) = |س| - ٣   ج) د$_{٣}$(س) = |س + ٢|

د) د$_{٤}$(س) = |٥ - س|   هـ) د$_{٥}$(س) = |س + ٢| + ١   و) د$_{٦}$(س) = |س − ٣| - ٢

➢ ثم أوجد إحداثيات نقط تقاطع المنحنيات مع المحورين.

**(١٣)** استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = س$^{٣}$. لتمثيل ما يأتي بيانيا:

أ) د$_{١}$(س) = د(س) − ٣   ب) د$_{٢}$(س) = د(س) + ١   ج) د$_{٣}$(س) = د (س − ٢)

د) د$_{٤}$(س) = د(س + ٣)   هـ) د$_{٥}$(س) = د(س − ٢) − ١   و) د$_{٦}$(س) = د(س + ٣) + ٢

➢ ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

**(١٤)** إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ) ق(س) = د(س + ١)   ب) ق(س) = د(س − ٣)   ج) ق(س) = د(س) + ٢

د) ق(س) = د(س) - ٤   هـ) ق(س) = د(س + ٢) - ٥   و) ق(س) = د(س - ٢) + ٢

**(١٥)** استخدم منحنى الدالة د حيث د (س) = س$^{٢}$ لتمثيل ما يأتي بيانيًّا:

أ) د$_{١}$(س) = ٤ - س$^{٢}$   ب) د$_{٢}$(س) = − (س − ٣)$^{٢}$   ج) د$_{٣}$(س) = -٢ - (س +٣)$^{٢}$

**(١٦)** استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل ما يأتي بيانيًّا.

أ) د$_{١}$(س) = ٢ - |س|   ب) د$_{٢}$(س) = -|س +٥|   ج) د$_{٣}$(س) = ٤ - |س -٢|

د) د$_{٤}$(س) = ٢|س|   هـ) د$_{٥}$(س) = -٢ |س -١|   و) د$_{٦}$(س) = ٥ - ٢ |س +٢|

**(١٧)** ارسم منحنى الدالة د في كل مما يأتي باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها

أ) د$_{١}$(س) = { س$^{٢}$ + ٢ عندما س ≥ ٠ ، -س$^{٢}$ - ٢ عندما س < ٠ }

ب) د$_{٢}$(س) = { س$^{٢}$ + ١ عندما -٤ ≤ س < ٠ ، -س$^{٢}$ - ١ عندما ٠ ≤ س ≤ ٤ }

ج) د$_{٣}$(س) = س |س| - ١   د) د$_{٤}$(س) = $\frac{٢س}{س + ١}$

**(١٨)** إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\frac{١}{س}$، فارسم الشكل البيانى للدالة ل فى الحالات الآتية:

أ) ل(س) = |د(س)|   ب) ل(س) = ٢ + |د(س)|   ج) ل(س) = |د(س - ٢)|

**١٩** ارسم منحنى الدالة د ، وحدد مداها إذا كان:

أ) د(س) = $\sqrt{س^2 - 8س + 16}$  ب) د(س) = $|س^2 - 2س - 3|$ ، س ∈ [-١، ٤]

**٢٠** **الربط مع التجارة:** يدفع تاجر غلال ٥٠ جنيهًا عن كل طن يدخل أو يخرج من مستودعه كأجر تحميل أو تنزيل، اكتب الدالة التى تمثل تكاليف التحميل أو التنزيل ومثلها بيانيًّا.

**٢١** **الربط مع الميكانيكا:** يقطع جسم مسافة ف مترًا في ٣ دقائق إذا تحرك الجسم بسرعة ثابتة مقدارها ٣٠ مترًا/ دقيقة، بين أن سرعة الجسم ع تتغير عكسيًّا بتغير الزمن (ن) لقطع هذه المسافة ، واكتب الدالة التى تمثل السرعة والزمن ومثلها بيانيًّا ثم أوجد زمن قطع هذه المسافة اذا تحرك الجسم بسرعة ٤٥ مترًا / دقيقة.

**٢٢** **المجتمعات العمرانية:** خصصت قطع أراضي مستطيلة الشكل لإسكان الشباب بإحدى المجتمعات العمرانية الجديدة ، فإذا كان طول كل منها س متراً، ومساحتها ٤٠٠ مترًا مربعًا.

أ) بين أن طول قطعة الأرض يتناسب عكسياً مع عرضها.

ب) اكتب قاعدة الدالة د التى تبين عرض قطعة الأرض بدلالة طولها ومثلها بيانيًّا.

جـ) أوجد من الرسم عرض قطعة الأرض التى طولها ٢٥ متراً وتحقق من ذلك جبريًّا.

## تفكير ابداعي:

**٢٣** إذا كان $س_1$ ، $س_2$ أصفارًا للدالة د: د(س) = $(س - أ)^2 - 8$ حيث $س_1 < س_2$ وكان $س_3$ ، $س_4$ أصفارًا للدالة ر: ر(س) = $5 - (س - أ)^2$ حيث $س_3 < س_4$ ، أ ∈ ع فأى العبارات التالية صحيحة:

أ) $س_1 < س_2 < س_3 < س_4$  ب) $س_1 < س_3 < س_4 < س_2$

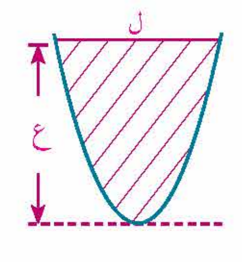
جـ) $س_3 < س_1 < س_2 < س_4$  د) $س_3 < س_1 < س_4 < س_2$

**٢٤** **الربط مع الصناعة:** صممت بوابة حديدية ارتفاع جانبيها ٣ أمتار وقوسها على شكل جزء من منحنى الدالة د: د(س) = $أ(س - 2)^2 + 4$ كما فى الشكل المقابل. أوجد:

أ) قيمة أ  ب) أقصى ارتفاع للبوابة

جـ) عرض البوابة

**٢٥** **الربط مع الهندسة:** إذا علمت أن مساحة الشكل المحصور بين منحنى الدالة التربيعية والقطعة المستقيمة الأفقية المرسومة بين أى نقطتين عليه والموضحة فى الشكل المقابل تعطى العلاقة م = $\frac{2}{3}$ ل ع




أ) أوجد مساحة الشكل المحصور بين محور السينات ومنحنى الدالة د: د(س) = $س^2 - 6س + 5$ بالوحدات المربعة

ب) ارسم على نفس الشبكة البيانية منحيى الدالتين د، ر حيث ر(س) = $|س - 3| - 2$ ثم أوجد مساحة الجزء المحصور بينهما بالوحدات المربعة.

# ١ - ٥ حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

*Solving Absolute Value Equations and Inequalities*

**سوف تتعلم**

- حل معادلات المقياس بيانيًّا
- حل معادلات المقياس جبريًّا
- حل متباينات المقياس بيانيًّا.
- حل متباينات المقياس جبريًّا
- نمذجة مشكلات وتطبيقات حياتية وحلها باستخدام معادلات ومتباينات المقياس

**المصطلحات الأساسية**

- معادلة. Equation
- متباينة. Inequality
- حل بياني. Graphical Solution

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة رسومية
- ورق رسم بياني
- برامج رسومية للحاسوب.

## أولًا: حل المعادلات

### فكر وناقش

مثل بيانيًّا في شكل واحد منحنيي الدالتين د، ر حيث د دالة مقياس، ر دالة خطية. لاحظ الرسم ثم اجب:

أ ما عدد نقط التقاطع المحتمل لمنحنيي الدالتين معًا؟

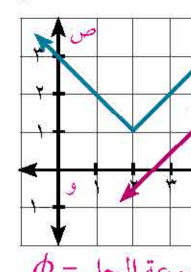
ب إذا وجدت نقط تقاطع للمنحنيين معًا، هل تحقق الأزواج المرتبة لها قاعدة كل من الدالتين ؟

جـ استخدم الحاسبة البيانية في التحقق من صحة إجابتك.

### لاحظ أن:

١) عند نقط التقاطع (إن وجدت) يكون: د(س) = ر(س) ، والعكس صحيح لكل س تنتمي إلى المجال المشترك للدالتين.

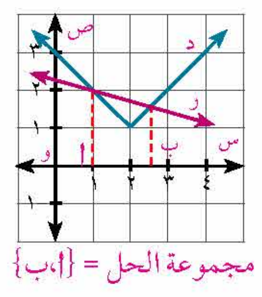
٢) لأى دالتين د، ر تكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى مجموعة الإحداثيات السينية لنقط تقاطع منحنيهما كما توضحه الأشكال التالية:



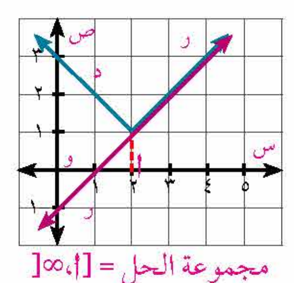


مجموعة الحل = $\phi$

مجموعة الحل = {أ}



مجموعة الحل = {أ،ب}



مجموعة الحل = ]أ،∞[

**حل المعادلة: | أ س − ب | = جـ**

**مثال**

١ حل المعادلة: |س - ٣| = ٥ بيانيًّا وجبريًّا.

**الحل**

بوضع د(س) = |س - ٣| ، ر(س) = ٥

**١)** نرسم منحنى الدالة د: د(س) = |س - ٣| بإزاحة منحنى د(س) = |س| ثلاث وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

**٢)** على نفس الشكل نرسم ر(س) = ٥ ، حيث ر دالة ثابتة يمثلها مستقيم يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠، ٥)

∴ المنحنيين يتقاطعان في النقطتين (-٢، ٥) ، (٨، ٥)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {-٢ ، ٨}

**الحل الجبرى:**

من تعريف دالة المقياس: د(س) = { س - ٣ عندما س ⩾ ٣ ، - س + ٣ عندما س < ٣

عندما س ⩾ ٣: س - ٣ = ٥ أى أن: س = ٨ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : - س + ٣ = ٥ أى أن: س = -٢ ∈ ]- ∞ ، ٣[

مجموعة حل المعادلة هى: {- ٢ ، ٨} وهذا يطابق الحل البياني.

**حاول أن تحل**

**١)** حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

أ |س| - ٤ = ٠ ب |س| + ١ = ٠ جـ |س - ٧| = ٥

## بعض خواص مقياس العدد *Properties of the Absolute Value*




**١)** |أ ب| = |أ| × |ب| فمثلا:

|٢ × -٣| = |-٦| = ٦ ، |٢| × |-٣| = ٢ × ٣ = ٦

**٢)** |أ + ب| ⩽ |أ| + |ب|

ويحدث التساوى فقط إذا كان العددان أ ، ب لهما نفس الإشاره فمثلًا:

|٤ + ٥| = |٤| + |٥| = ٩ ، |- ٤ - ٥| = |- ٤| + |- ٥| = ٩

**لاحظ:**

**١)** إذا كان: |س| = أ فإن: س = أ أو س = -أ لكل أ ∈ ع+

**٢)** إذا كان: |أ| = |ب| فإن: أ = ب أو أ = - ب لكل أ ، ب ∈ ع

**٣)** |س|² = |س²| = س²

**٤)** إذا كان |س| = س فإن س ∈ [٠، ∞[

**٥)** إذا كان |س| = - س فإن س ∈ ]- ∞ ، ٠]

**حل المعادلة |أ س + ب| = جـ س + د**

## مثال

(٢) حل المعادلة: |٢س - ٣| = س + ٣ بيانيًّا وجبريا.

**الحل**

بوضع د(س) = |٢س -٣| ، ر(س) = س + ٣

**الحل البيانى:**

د: د(س) = |٢س − ٣| = |٢(س - $\frac{٣}{٢}$)|

∴ د(س) = ٢ |س - $\frac{٣}{٢}$|

منحنى د هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية

قدرها $\frac{٣}{٢}$ وحدة في اتجاه و س

ر: ر(س) = س + ٣ ويمثلها خط مستقيم ميله =١ ويمر بالنقطة (٠، ٣)

∵ نقط التقاطع هى (٠ ، ٣) ، (٦، ٩)

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

**الحل الجبرى:**

∵ |٢س - ٣| = { ٢ س - ٣ عندما س ≥ $\frac{٣}{٢}$ ، - ٢ س + ٣ عندما س < $\frac{٣}{٢}$ }

∴ عندما س ≥ $\frac{٣}{٢}$ تكون ٢س − ٣ = س + ٣ ومنها س = ٦ ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ∞[

، عندما س < $\frac{٣}{٢}$ تكون - ٢س + ٣ = س + ٣ ومنها س = ٠ ∈ ]- ∞ ، $\frac{٣}{٢}$[

∴ مجموعة حل المعادلة هى: {٠ ، ٦}

**حاول أن تحل**

(٢) حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا وجبريًّا.

(أ) |٢س + ٤| = ١ − س (ب) |٢س + ٥| = س − ٤ (جـ) |س - ٣| = ٣ − س

**حل المعادلة: |أ س + ب| = |جـ س + د|**

## مثال

(٣) حل المعادلة |س - ٣| = |٢س + ١| بيانيًّا.

**الحل**

بوضع د(س) = |س -٣| ، ر(س) = |٢ س +١|

منحنى د: هو نفس منحنى |س| بإزاحة قدرها ٣ وحدات في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}}$

ر: ر(س) = ٢ |س + $\frac{١}{٢}$ |

منحنى ر هو نفس منحنى ٢|س| بإزاحة أفقية قدرها $\frac{١}{٢}$ وحدة في اتجاه $\overleftarrow{\text{و س}^-}$ ، ويكون نقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر هى: (-٤، ٧) ، ( $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$ )

مجموعة حل المعادلة هى {-٤، $\frac{١}{٢}$ }

**حاول أن تحل**

٣ حل كلًّا من المعادلات الآتية بيانيًّا.

أ |س + ٧| = |٢س + ٣|

ب |س – ٢| + |س - ١| = صفر

## مثال

٤ أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ |س + ٧| = |س – ٥|

ب $\sqrt{\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩}$ = ٩ – ٢س

**الحل**

أ ∵ |س + ٧| = |س – ٥|  ∴ س + ٧ = ± (س – ٥)

∴ س + ٧ = س – ٥  ∴ ٧ = -٥ (غير ممكن).

أو س + ٧ = - س + ٥  أي أن: ٢س = -٢

∴ س = -١  أي أن مجموعة حل المعادلة هى {-١}

التحقيق:

بالتعويض عن س = -١ فى طرفى المعادلة نجد أن:

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر = ٦  أي أن مجموعة الحل هى {-١}

**تذكر أن**

إذا كان أ، ب ∈ ع

وكان |أ| = |ب|

فإن: أ = ± ب

**فكر:**

حل المعادلة السابقة بتربيع طرفيها، ثم تحقق من صحة الحل.

ب ∵ $\sqrt{\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩}$ = ٩ – ٢س

∴ $\sqrt{(\text{س} - ٣)^٢}$ = ٩ – ٢س  أي أن: ∴ |س - ٣| = ٩ – ٢س

أولا: عندما س ≥ ٣  فإن: س – ٣ = ٩ – ٢س

∴ ٣س = ١٢  أي أن: س = ٤ ∈ [٣، ∞[

ثانيا: عندما س < ٣  فإن: س – ٣ = - ٩ + ٢س

∴ س = ٦  أي أن: س = ٦ ∉ ]-∞ ، ٣[  ∴ مجموعة الحل هى {٤}

**تذكر أن**

لأي عدد حقيقي أ يكون:

$\sqrt{\text{أ}^٢}$ = |أ|

**فكر:**

**١)** هل يمكنك استخدام طرق جبرية أخرى لإيجاد حلٍّ للمعادلة ؟ وضح ذلك.

**حاول أن تحل**

**٤** أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

أ $|$س - ١$|$ - ٢ $|$٢ - س$|$ = ٠

ب $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ٤}$ = ٤

### تطبيقات حياتية على حل المعادلات

**مثال**

**تخطيط المدن**

**٥** قطعة أرض محصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = $|$س-٣$|$ -٢ ، ر(س)=٣ ، احسب مساحتها بالوحدات المربعة وإذا كان طول الوحدة ٨ أمتار إحسب مساحة الأرض بالأمتار المربعة.

**الحل**

بتمثيل منحيي الدالتين د ، ر بيانيا نجد انهما يتقاطعان في النقط أ (-٢،٣) ، ب (٨،٣) ، و تكون قطعة الأرض على شكل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية جـ حيث

أ ب = ٨-(-٢)=١٠وحدات

جـ ى = ٣-(-٢)=٥ وحدات

∴ مساحة △ ب أ جـ = $\frac{١}{٢}$ أ ب × جـ ى

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥ وحدة مربعة

مساحة قطعة الأرض = ٢٥ (٨×٨) = ١٦٠٠ متراً مربعًا.

**حاول أن تحل**

**٥** أوجد بالوحدات المربعة المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين د ، ر حيث:

د(س) = $|$س-٢$|$ -١ ، ر(س)=٥-$|$س-٢$|$

**مثال**

**شبكات الطريق**

**٦** طريقان الأول يمثله منحنى الدالة د حيث د(س) = $|$س-٥$|$ ، و الثاني يمثله منحنى الدالة ر حيث ر(س) =٥ - $\frac{٢}{٣}$ س ، اذا تقاطع الطريقان في نقطتي أ، ب أوجد المسافة بين أ،ب لأقرب كيلو متر اذا كانت وحدة الأطوال تمثل مسافة قدرها ٥ كيلومترات.

**الحل**

يتقاطع الطريقان عندما د(س)= ر(س) ، و يكون $|$س-٥$|$ = ٥ - $\frac{٢}{٣}$ س

∴ س - ٥ = ٥ - $\frac{٢}{٣}$س　　أي　　س=٦ ، ص=١　　∴ أ=(٦،١)

أو س - ٥ = $\frac{٢}{٣}$ س - ٥　　أي　　س=٠ ، ص=٥　　∴ ب=(٠،٥)

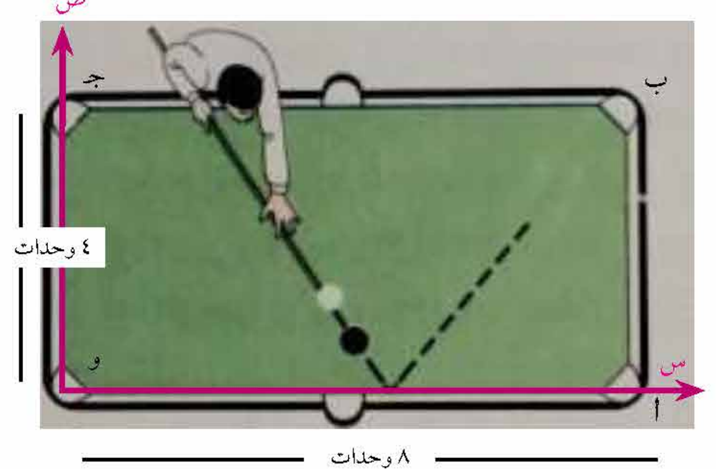
أ ب = $\sqrt{(٦-٥)^٢+(١-٥)^٢}$ = $\sqrt{٥٢}$ = ٢$\sqrt{١٣}$

∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلومترات　　∴ المسافة بين أ ، ب = ٥ × ٢ $\sqrt{١٣}$ = ١٠ $\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

## نشاط

زاوية الانعكاس　زاوية السقوط　مرآه

اذا سقط شعاع الضوء على سطح عاكس فإن مساره يخضع لدالة المقياس فيكون قياس زاوية السقوط مساوياً لقياس زاوية الانعكاس ، كذلك مسار كرة البلياردو قبل و بعد تصادمها مع حافة الطاولة في بعض الحالات.



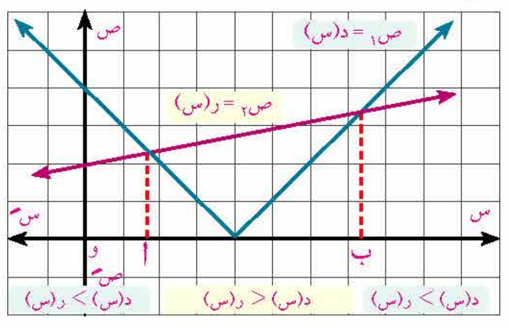

١) يوضح الشكل المقابل:
تصويب لاعب البلياردو على الكرة السوداء، باعتبار $\overleftarrow{وس}$ ، $\overleftarrow{وص}$ محوري الاحداثيات المتعامدة، وأن مسار الكرة يتبع منحنى الدالة د حيث: د(س) = $\frac{٤}{٣}$ |س-٥|
هل تسقط الكرة السوداء في الجيب ب؟ فسر إجابتك رياضيًّا.

### حاول أن تحل

٦) في المثال السابق تحقق من نقط التقاطع بحل المعادلتين بيانيًّا.

## ثانيا: حل المتباينات　*Solving the Inequalities*

سبق أن درست المتباينات، وعلمت أن المتباينة هى عبارة رياضية تحتوي أحد الرموز: (< ، > ، ≥ ، ≤)
والمقصود بحل المتباينة هو إيجاد القيمة أو مجموعة القيم للمتغير التى تجعل المتباينة صحيحة.




### حل المتباينات بيانيًّا

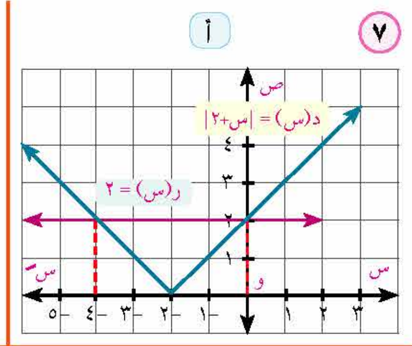
يبين الشكل المقابل منحنى كل من الدالتين د، ر حيث:
$ص_١$ = د(س) ، $ص_٢$ = ر(س) وتكون مجموعة حل المعادلة د(س) = ر(س) هى {أ ، ب}
أي أن: $ص_١$ = $ص_٢$ عندما س = أ أو س = ب

ويلاحظ: ص١ < ص٢ أى د(س) < ر(س) عندما س∈ ] أ ، ب[

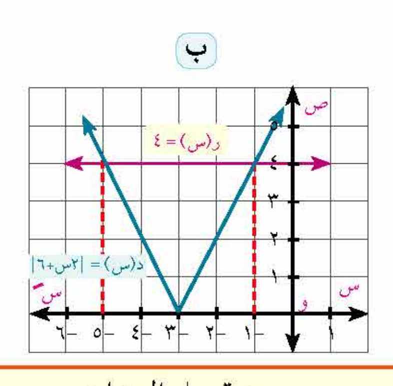
ص١ > ص٢ أى د(س) > ر(س) عندما س∈ ] - ∞ ، أ[ ∪ ]ب ، ∞[

### مثال

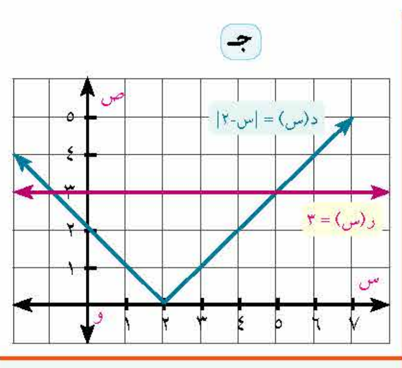
⑦ أ




ب




جـ




| أ | ب | جـ |
|---|---|---|
| مجموعة حل المتباينه | مجموعة حل المتباينه | مجموعة حل المتباينه |
| \|س+٢\| < ٢ | \|٢ س + ٦\| ≥ ٤ | \|س - ٢\| ≤ ٣ |
| هى: ] -٤ ، ٠[ | هى: ]-∞، -٥] ∪ [ -١، ∞[ | هى: [-١، ٥] |
| | أى أن: ع - ]-٥، -١[ | |

**؟ حاول أن تحل**

⑦ أوجد مجموعة حل كل من المتباينات التالية مستعينًا بالأشكال البيانية في مثال (٧):

أ |س + ٢| ≤ ٢ ب |٢ س + ٦| ≤٤ جـ |س - ٢| > ٣

## حل المتباينات جبريًا



### تعلم

أولاً: إذا كان |س| ≤ أ ، أ > ٠ فإن: -أ ≤ س ≤ أ

ثانيًا: إذا كان |س| ≥ أ ، أ > ٠ فإن: س≥أ أو س ≤ -أ

### مثال

⑧ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٣| < ٤ ب $\sqrt{}$س٢ - ٢س + ١ ≥ ٤

جـ $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ ≥ ٢

**الحل**

أ ∵ |س - ٣| < ٤ أى -٤ < س - ٣ < ٤ وبإضافة ٣ إلى المتباينة

∴ -٤ + ٣ < س - ٣ + ٣ < ٤ + ٣ أى أن: -١ < س < ٧

∴ مجموعة الحل = ] -١ ، ٧[

**تذكر أن**

لكل من أ ، ب ، جـ

إذا كان: أ > ب ، ب > جـ

فإن أ > جـ

إذا كان: أ > ب فإن

أ + جـ > ب + جـ

أ جـ > ب جـ عند جـ > ٠

أ جـ < ب جـ عند جـ < ٠

إذا كان أ ، ب موجبتان ،

أ > ب فإن $\frac{١}{أ}$ < $\frac{١}{ب}$

ب ∵ $\sqrt{(س - ١)^{٢}}$ = |س - ١| أي أن: |س - ١| ⩾ ٤

∴ س - ١ ⩾ ٤ أي س ⩾ ٥ أ، س - ١ ⩽ - ٤ أي س ⩽ - ٣

س ∈ ع - ] - ٣ ، ٥[ ∴ مجموعة حل المتباينة هى ] - ∞ ، - ٣] ∪ [٥ ، ∞[

ج ∵ $\frac{١}{|٢س - ٣|}$ ⩾ ٢ وبأخذ المعكوس الضربى للطرفين ∴ |٢س - ٣| ⩽ $\frac{١}{٢}$ ، س ≠ $\frac{٣}{٢}$

∴ - $\frac{١}{٢}$ ⩽ ٢س - ٣ ⩽ $\frac{١}{٢}$ وبإضافة ٣ إلى المتباينة ∴ - $\frac{١}{٢}$ + ٣ ⩽ ٢س - ٣ + ٣ ⩽ $\frac{١}{٢}$ + ٣

∴ $\frac{٥}{٢}$ ⩽ ٢س ⩽ $\frac{٧}{٢}$ وبالقسمة على ٢ ∴ $\frac{٥}{٤}$ ⩽ س ⩽ $\frac{٧}{٤}$

∴ مجموعة حل المتباينة هى [ $\frac{٥}{٤}$ ، $\frac{٧}{٤}$ ] - {$\frac{٣}{٢}$}

**حاول أن تحل**

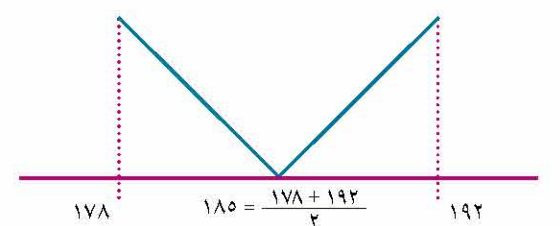
٨ أوجد على صورة فترة مجموعة حل كل من المتباينات الآتية:

أ |س - ٧| < ١١ ب |٣س + ٧| ⩽ ٨ ج $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩}$ ⩾ ٨ د $\frac{١}{|٣س|}$ ⩾ ٥

**مثال**

### (تطبيق حياتى على حل المتباينة)

٩ تسمح إحدى شركات الغاز الطبيعي بتوظيف قارئ العداد اذا كان طوله يتراوح بين ١٧٨سم ، ١٩٢سم.
عبر عن الأطوال الممكنة لمن يتقدم لشغل هذه الوظيفة بمتباينة القيمة المطلقة.




**الحل**

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم
حيث ١٧٨ ⩽ س ⩽ ١٩٢ ، بإضافة -١٨٥ الي أطراف المتباينة.

١٧٨ - ١٨٥ ⩽ س - ١٨٥ ⩽ ١٩٢ - ١٨٥

-٧ ⩽ س - ١٨٥ ⩽ ٧ أي أن |س-١٨٥| ⩽ ٧

**حاول أن تحل**

٩ اكتب متباينة القيمة المطلقه التي تعبر عن:

أ درجة طالب في اختبار ما تراوح بين ٦٠ الي ١٠٠ درجة.

ب درجة حرارة مقاسة بالترمومتر الطبي يتراوح بين ٣٥°C ، ٤٢°C

ج توجد الطحالب الخضراء في المحيطات على عمق يصل إلى ٣٠ مترًا.

**تفكير ناقد:** اكتب على صورة متباينة القيمة المطلقة كل مما يأتى:

أ - ٤ ⩽ س ⩽ ٤ ب ٠ < س < ٦

ج س ⩽ - ٢ أو س ⩾ ٢ د ع - [-٢ ، ٦]




**أوجد جبريًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:**

(١) $|س - ٢| = ٣$ (٢) $|٣ - ٢س| = ٧$ (٣) $|س + ٢| = ٣س - ١٠$

(٤) $|س + ٢| + س - ٢ = ٠$ (٥) $س + |س| = ٢$ (٦) $|س - ٢| = ٣س - ٤$

(٧) $|س - ١| = س - ٢$ (٨) $|٢س - ٦| = |س - ٣|$ (٩) $\sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} + ٢س = ٩$

**أوجد بيانيًّا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:**

(١٠) $|س - ٣| = ٧$ (١١) $|س + ٢| + س - ٢ = ٠$ (١٢) $|س - ٢| = ٣س - ٤$

(١٣) $|٢س - ٤| = |س + ١|$ (١٤) $|س| + س = ٠$ (١٥) $|س + ٢| = |س - ٣|$

**أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية بيانيًّا:**

(١٦) $|س - ١| < ٢$ (١٧) $|س - ٢| < ٣$ (١٨) $|٥ - س| > ٣$

(١٩) $|٢س - ٣| \geq ٧$ (٢٠) $|س + ٣| > -١$ (٢١) $|٢س - ٥| \geq ٢$

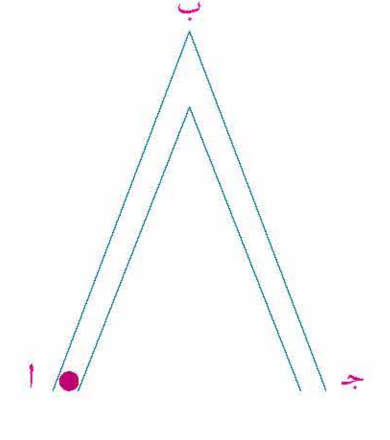
**أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية جبريًّا:**

(٢٢) $|س - ٣| \leq ١٥$ (٢٣) $|٣س - ٢| < ٤$ (٢٤) $|٣س - ٧| \geq ٢$

(٢٥) $|٣س + ٢| + ٥ < ٤$ (٢٦) $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} \geq ٤$ (٢٧) $\sqrt{٤س^{٢} - ١٢س + ٩} \leq ٩$

(٢٨) $|٢س - ٣| + |٦ - ٤س| < ١٢$ (٢٩) $\frac{١}{|٢س - ٥|} \geq ٣$ (٣٠) $\frac{١}{|٢س - ٣|} > ٢$

(٣١) **الربط بالميكانيكا:**




يتحرك جسم بسرعة منتظمة مقدارها ٨سم/ث من الموضع أ إلى الموضع جـ مرورًا بالموضع ب دون توقف، وكانت المسافة بين الجسم و الموضع ب تحسب بالقاعدة ف (ن) = ٨ |٥ - ن| حيث ن الزمن بالثواني ف المسافة بالسنتيمترات.

أ) احسب المسافة بين الجسم و الموضع ب بعد ثانيتين و بعد ٨ ثوان ماذا تلاحظ؟ فسر إجابتك

ب) متى يكون الجسم على بعد ١٦ سم من الموضع ب، فسر إجابتك.

جـ) متى يكون الجسم على بعد يقل عن ٨ سم من الموضع ب.

## تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

## ملخص الوحدة

**١** **الدالة:** هى علاقة بين مجموعتين غير خاليتين س ، ص بحيث يكون لكل عنصر من عناصر س عنصرًا وحيدًا من عناصر ص ، وتكتب رمزيًّا بالصورة د: س ⟵ ص، وتتحدد الدالة بثلاثة عناصر هى: المجال، المجال المقابل، وقاعدة الدالة.
وتسمى الدالة د دالة حقيقية إذا كان كل من مجالها ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها.

**٢** **اختبار الخط الرأسى:** إذا مثلت علاقة بمجموعة من النقاط فى مستوى احداثى متعامد وقطع الخط الرأسى عند كل عنصر من عناصر المجال تمثيلهما البيانى فى نقطة واحدة فقط فإن هذه العلاقة تمثل دالة.

**٣** **دالة متعددة التعريف:** هى دالة حقيقية يكون لكل مجموعة جزئية من مجالها قاعدة تعريف مختلفة.

**٤** **العمليات على الدوال:** إذا كانت $د_1$ ، $د_2$ دالتين مجالاهما $م_1$، $م_2$ فإن:

- $(د_1 \pm د_2)(س) = د_1(س) \pm د_2(س)$ ، مجال $(د_1 \pm د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
- $(د_1 . د_2)(س) = د_1(س) . د_2(س)$ ، مجال $(د_1 . د_2)$ هو $م_1 \cap م_2$
- $(\frac{د_1}{د_2})(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ حيث $د_2(س) \neq ٠$ مجال $(\frac{د_1}{د_2})$ هو $(م_1 \cap م_2) - ف(د_2)$

حيث ف $(د_2)$ مجموعة أصفار $د_2$

**٥** **تركيب الدوال:** إذا كان مدى الدالة د مجموعة جزئية من مجال الدالة ر فيمكن تركيب الدالة ع من الدالتين د ، ر حيث ع = ر ∘ د وتقرأ ر تركيب د ويكون ع(س) = (ر ∘ د) (س) = ر[د(س)]

**٦** **الدالة الزوجية والدالة الفردية:**

**الدالة الزوجية:** يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة زوجية إذا كان د(-س) = د(س) لكل س ، -س ∈ س.

**الدالة الفردية:** يقال للدالة د: س ⟵ ص إنها دالة فرديةإذا كان د(-س) = -د(س) لكل س ، -س ∈ س.

**٧** **الدالة الأحادية:** الدالة د: س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان:
لكل أ ، ب ∈ س و د(أ) = د(ب) فإن أ = ب أو لكل أ ≠ ب فإن د(أ) ≠ د(ب)

**٨** **اختبار الخط الأفقى:** تكون د : س ⟵ ص دالة أحادية إذا كان الخط الأفقى (الموازى لمحور السينات عند كل عنصر من عناصر مدى الدالة يقطع منحنى الدالة في نقطة واحدة.

**٩** **اطراد الدوال:** تكون الدالة د تزايدية فى الفترة ]أ ، ب[ إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈ ]أ ، ب[ ، $س_2 > س_1$ فإن $د(س_2) > د(س_1)$:
وتكون د تناقصية فى الفترة ]أ ، ب[ إذا كان لكل $س_1$ ، $س_2$ ∈ ]أ ، ب[، $س_2 > س_1$ فإن $د(س_2) < د(س_1)$
وتكون د ثابتة فى الفترة ]أ ، ب[ إذا كان لكل $س_1$، $س_2$ ∈ ]أ ، ب[ ، $س_2 > س_1$ فإن $د(س_2) = د(س_1)$

١٠ **الدالة الخطية:** أبسط صورها: د(س) = س ويمثلها خط مستقيم يمر بالنقطة (٠ ، ٠)

١١ **الدالة التربيعية:** أبسط صورها د(س) = $س^٢$ ، نقطة رأس المنحنى هى (٠، ٠)، معادلة محور التماثل س = ٠

١٢ **الدالة التكعيبية:** أبسط صورها د(س) = $س^٣$ ، نقطة تماثل منحنيها هى (٠، ٠)

١٣ **دالة المقياس: (القيمة المطلقة)**

أبسط صورة لدالة المقياس هى د(س) = |س|، وتعرف على النحو التالى: د(س) = { س ، س ⩾ ٠ ؛ -س ، س < ٠

ويمثلها شعاعان يبدأن من النقطة (٠، ٠) ميل أحدهما = ١ وميل الآخر = -١ ويكون:

|س| ⩾ ٠ ، |-س| = |س| ، $\sqrt{س^٢}$ = |س|

١٤ **الدالة الكسرية:** أبسط صورها هى د(س) = $\frac{١}{س}$ ، نقطة تماثل منحنيها هى (٠، ٠)

١٥ **التحويلات الهندسية** للدالة د، حيث ص = د(س) ، أ > ٠ تحدد بالآتي:

- إذا كانت ص = د(س) + أ فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار أ
- إذا كانت ص = د (س) - أ فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار أ
- إذا كانت ص = د(س + أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه السالب لمحور السينات بمقدار أ
- اذا كانت ص = د (س - أ) فإنها تمثل بإزاحة منحنى د في الاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار أ
- اذا كانت ص = - د (س) فإنها تمثل بانعكاس منحنى د فى محور السينات.
- اذا كانت ص = أ د (س) فإنها تمثل بتمدد رأسي لمنحنى د إذا كان أ > ٠ وإنكماش رأسي إذا كان ٠ < أ < ١

١٦ **خواص مقياس العدد:**

أ |أ ب| = |أ| × |ب|

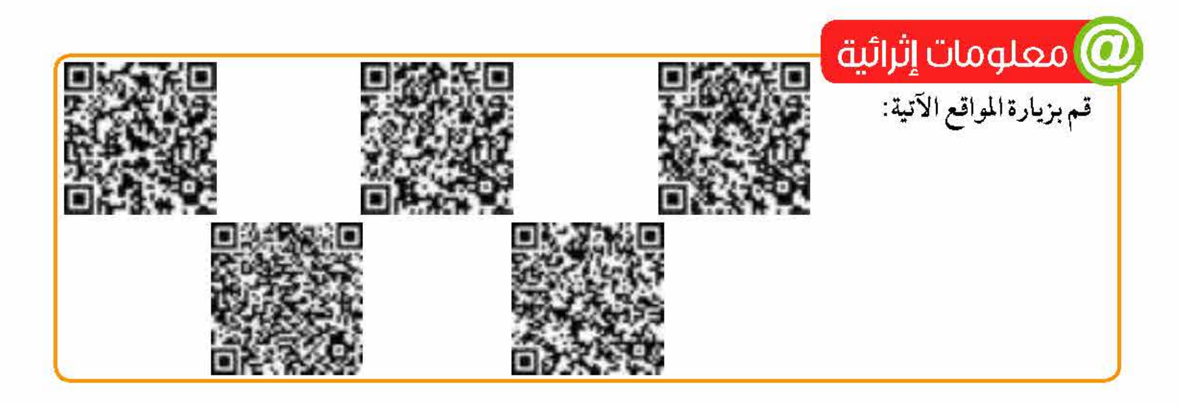
ب |أ + ب| ⩽ |أ| + |ب|

جـ إذا كان |س| ⩽ أ ، أ > ٠ فإن: -أ ⩽ س ⩽ أ

د إذا كان |س| ⩾ أ ، أ > ٠ فإن: س ⩾ أ أو س ⩽ -أ

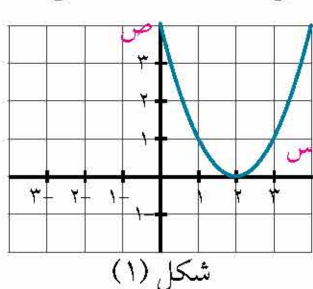
**معلومات إثرائية**

قم بزيارة المواقع الآتية:

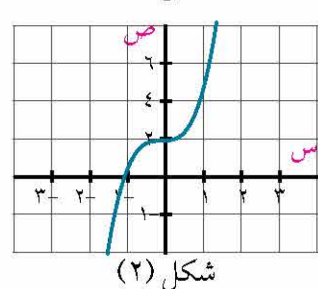


# اختبار تراكمى

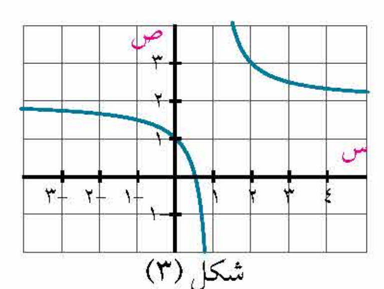
**(١)** أجريت بعض التحويلات الهندسية للدوال د ، ر ، ع حيث د(س) = س$^{٢}$ ، ر(س) = س$^{٣}$ ، ع(س) = $\frac{١}{س}$ فكانت كما فى الأشكال الآتية على الترتيب أكمل ما يأتى:



شكل (١)



شكل (٢)



شكل (٣)

أ) قاعدة الدالة فى شكل (١) هى..................

ب) قاعدة الدالة فى شكل (٢) هى..................

جـ) قاعدة الدالة فى شكل (٣) هى..................

د) الدالة ليست أحادية كما فى شكل..................

هـ) مدى الدالة في شكل (١) هو..................

و) مدى الدالة هو ع كما فى شكل..................

ز) نقطة تماثل الدالة فى شكل (٣) هى..................

ح) معادلة محور تماثل الدالة فى شكل (١) هى..................

**(٢)** أوجد مجال كل من الدوال المعرفة كما يلى:

أ) د$_{١}$(س) = $\frac{س}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$  ب) د$_{٢}$(س) = $\sqrt[٣]{س + ٢}$  جـ) د$_{٣}$(س) = $\frac{٣}{\sqrt{س - ٣}}$

**(٣)** إذا كانت د(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ ٠ ، ر(س) = ٢س فأوجد كلًّا من:

(د + ر)(س) ، (د . ر)(س) ، ($\frac{ر}{د}$)(س) ثم أوجد قيمة (د + ر) (١) ، (د . ر) (٢) ، ($\frac{ر}{د}$) (-١)

**(٤)** ارسم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س - ٣| + ١، ومن الرسم ابحث اطراد الدالة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د(س) = ٤

**(٥)** أوجد مجموعة حل كل من المعادلات والمتباينات الآتية:

أ) |س + ٢| = ٣س - ١٠  ب) س |س | - ٢ - س = ٠  جـ) |٣ - ٢س| < ٥

**(٦)** أثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{|س| + ١}{|س|}$ زوجية، وارسم منحنى د، ثم أوجد بيانيًّا وجبريًّا مجموعة حل المعادلة د(س) = ٢س - ٢، وتحقق من صحة الحل.

**(٧)** الربط بالميكانيكا: أُطلق صاروخ إلى أعلى بسرعة ٩٨ متر/ث من على سطح الأرض، فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعه عن سطح الأرض ف بالمتر، والزمن ن بالثانية تعطى بالعلاقة ف = ٩٨ ن - ٤,٩ ن$^{٢}$ بيِّن أن هذه الدالة ليست أحادية، ثم أوجد

أ) ارتفاع الصاروخ عن سطح الأرض بعد ثانيتين من لحظة انطلاقه.

ب) الزمن الذى يستغرقه الصاروخ حتى يكون على ارتفاع ٤٧٠,٤ مترًا من سطح الأرض.




# الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

# *Exponents, Logarithms and their Applications*




## مخرجات تعلم الوحدة

## المصطلحات الأساسية

## دروس الوحدة

الدرس (٢ - ١):

الدرس (٢ - ٢):

الدرس (٢ - ٣):

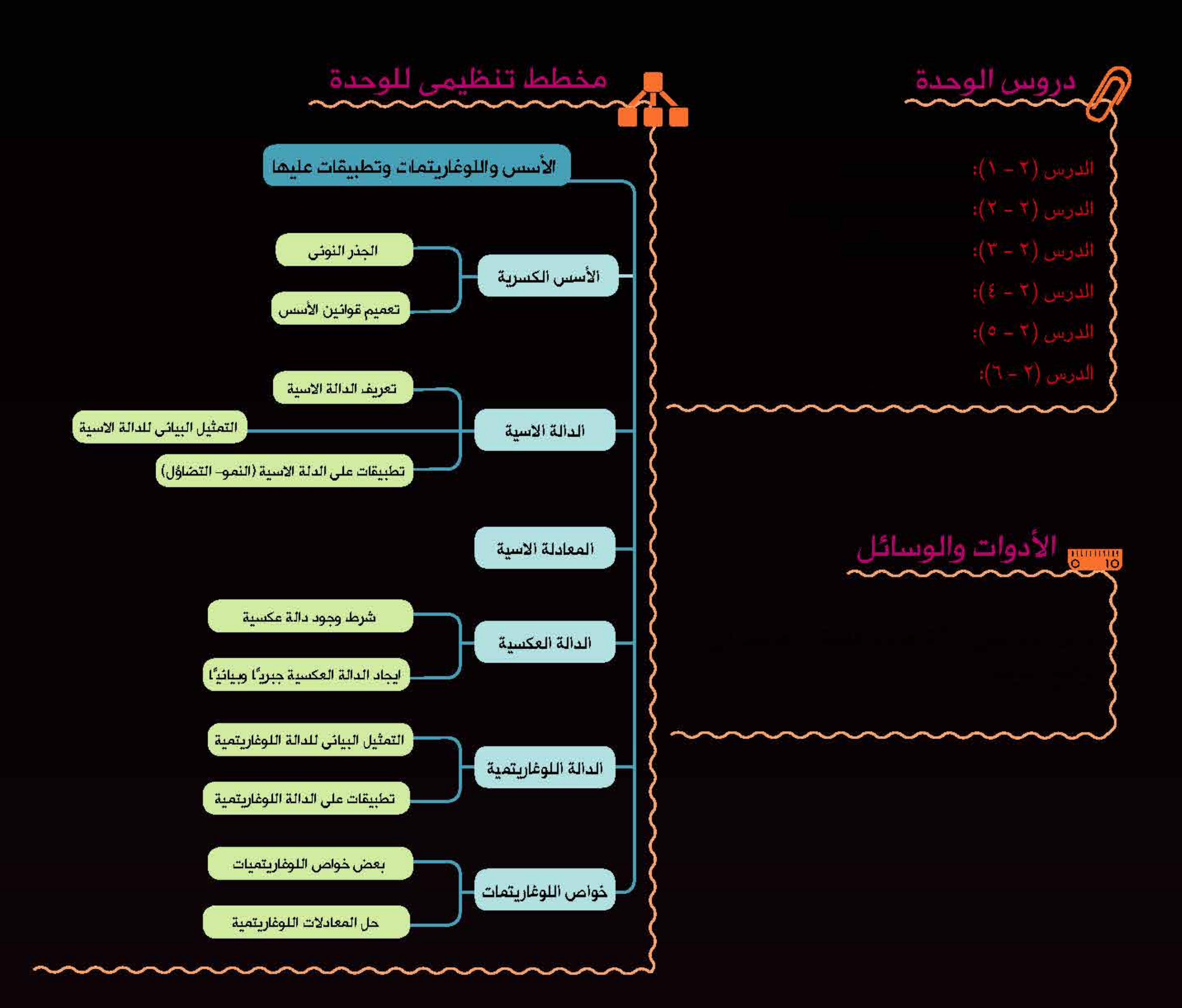
الدرس (٢ - ٤):

الدرس (٢ - ٥):

الدرس (٢ - ٦):

## الأدوات والوسائل

## مخطط تنظيمي للوحدة



# ٢ - ١ الأسس الكسرية

*Rational Exponents*

## تمهيد

سبق أن درست الجذور التربيعية لعدد حقيقي غير سالب وتعرفت على بعض خواص الجذور التربيعية والجذور التكعيبية ، ودرست الأسس الصحيحة وتعرفت على بعض خواصها وسوف نتعرف فى هذا الدرس على الأسس الكسرية.



## تعلم

### الأسس الصحيحة:

**تعريف**

**١)** لكل أ $\in$ ع ولكل ن $\in$ ص$^{+}$ فإن:

$أ^{ن} = أ \times أ \times أ \times ..... \times أ$ (حيث العامل أ مكرر ن من المرات)

ويسمى $(أ^{ن})$ **بالقوة النونية** للعدد أ، حيث يسمى العدد أ **بالأساس**، والعدد ن **بالأس** ونقول أ **مرفوع** للأس ن.

**٢)** $أ^{صفر} = ١$ لكل أ $\in$ ع - {٠}

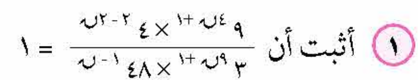
**٣)** $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ ، $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^{ن}}$ ، أ $\neq$ ٠

### خواص الأسس الصحيحة:

إذا كان لكل م، ن $\in$ ص ، أ ، ب $\in$ ع - {٠} فإن:

- $أ^{م} \times أ^{ن} = أ^{م+ن}$
- $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$
- $\frac{أ^{م}}{أ^{ن}} = أ^{م-ن}$
- $(\frac{أ}{ب})^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$
- $(أ^{م})^{ن} = أ^{م ن}$

**مثال**

**١** أثبت أن  $\frac{٩^{٤ن+١} \times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٤٨^{١-ن}} = ١$

**الحل**

الطرف الأيمن $= \frac{(٣^{٢})^{٤ن+١} \times (٢^{٢})^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times (٢^{٤} \times ٣)^{١-ن}} = \frac{(٣)^{٨ن+٢} \times ٢^{٤-٤ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٢^{٤-٤ن} \times ٣^{١-ن}}$

$= ٣^{٨ن+٢-٩ن-١-١+ن} \times ٢^{٤-٤ن-٤+٤ن}$

$= ٣^{صفر} \times ٢^{صفر} = ١ \times ١$ (الطرف الأيسر)

---

**سوف تتعلم**

- تعميم قوانين الأسس.
- الجذر النوني.
- قوانين الأسس الكسرية.



**المصطلحات الأساسية**

- القوة النونية — The $n^{th}$ Power
- الأساس — Base
- الأس — Exponent
- جذر نوني — $n^{th}$ Root
- أس كسرى — Rational Exponent

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

**حاول أن تحل**

(١) أوجد في أبسط صورة المقدار: $\frac{(٢٧)^{-٣} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}}$

**مثال**

(٢) أثبت أن: $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{ن-٢} \times (٢٥)^{م+ن}}{(٧٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}} = \frac{٥}{٩}$

**الحل**

الطرف الأيمن $= \frac{٥^{٣} \times (٣ \times ٥)^{ن-٢} \times (٥^{٢})^{م+ن}}{(٣ \times ٥^{٢})^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= \frac{(٥)^{٣} \times (٣)^{ن-٢} \times (٥)^{ن-٢} \times (٥)^{٢م+٢ن}}{(٣)^{ن} \times (٥)^{٢ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= (٥)^{٣+ن-٢+٢م+٢ن-٢ن-ن-٢م} \times (٣)^{ن-٢-ن}$

$= (٥)^{١} \times ٣^{-٢} = \frac{٥}{٣^{٢}} = \frac{٥}{٩}$ (الطرف الأيسر)

**حاول أن تحل**

(٢) أثبت أن: $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}} = \frac{١١}{١٥}$

**تفكير ناقد:**

أ) إذا كانت أ ∈ ع⁻، ن عددًا صحيحًا فرديًا، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتي:

(أ) $٠ < أ^{ن}$ (ب) $٠ > أ^{ن}$ (ج) $٠ \leq أ^{ن}$ (د) $٠ > أ^{ن+١}$

ب) إذا كانت أ ∈ ع -{٠}، ن عددًا صحيحًا زوجيًا، فحدد العبارات الصحيحة فيما يأتي:

(أ) $٠ < أ^{ن}$ (ب) $٠ > أ^{ن}$ (ج) $٠ = أ^{ن-١}$ (د) $٠ \geq أ^{ن}$

## الجذر النوني:

**تعلمت أن:**

**المعادلة** $س^{٢} = ٩$ لها جذران حقيقيان فقط هما $\sqrt{٩} = ٣$ أو $-\sqrt{٩} = -٣$

**لاحظ أن** $٣^{٢} = ٩$ ، $(-٣)^{٢} = ٩$

**كذلك المعادلة** $س^{٣} = ٨$ لها جذر حقيقي وحيد

هو $\sqrt[٣]{٨} = ٢$ (باقي جذور المعادلة أعداد مركبة غير حقيقية)

**لاحظ أن** $(٢)^{٣} = ٨$

> **لاحظ أن**
> لأي عدد حقيقي يكون
> $\sqrt{أ^{٢}} = |أ|$

**وعلى وجه العموم:**

**المعادلة $س^{ن} = أ$ حيث أ ∈ ع ، ن ∈ ص⁺ لها ن من الجذور، ونناقش فيما يلي عدة حالات:**

**١) إذا كان ن عددًا زوجيًا ، أ > ٠**

فإن المعادلة $س^{ن} = أ$ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية ويرمز للجذرين الحقيقيين بالرمزين $\sqrt[ن]{أ}$ ، $-\sqrt[ن]{أ}$ ، ويسمى الجذر النوني الذي له نفس إشارة أ بالجذر النوني الأساسي للعدد أ.

مثل: المعادلة $س^٤ = ١٦$ لها جذران حقيقيان هما $\sqrt[٤]{١٦} = ٢$ ، $-\sqrt[٤]{١٦} = -٢$

**(وباقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية).**

لاحظ أن $(٢)^٤ = ١٦$ ، $(-٢)^٤ = ١٦$

**٢) إذا كان ن عددًا زوجيًا ، أ < ٠**

فإن المعادلة $س^ن = أ$ ليس لها جذور حقيقية **(جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).**

مثل: المعادلة $س^٢ = -٩$ ليس لها جذور حقيقية **(جذورها أعداد مركبة غير حقيقية).**

**٣) إذا كان ن عددًا فرديًا ، أ ∈ ح - {٠}**

فإن المعادلة $س^ن = أ$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[ن]{أ}$ **(باقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)**

مثل: المعادلة $س^٥ = -٣٢$ لها جذر حقيقي وحيد هو $\sqrt[٥]{-٣٢} = -٢$ **(لاحظ أن $(-٢)^٥ = -٣٢$)**

**٤) إذا كان ن ∈ ص⁺ ، أ = صفر**

فإن المعادلة $س^ن$ = صفر لها حل حقيقي وحيد هو س = ٠ **(المعادلة لها ن من الجذور المكررة وكل منها يساوى صفر عندما ن > ١).**



حاول أن تحل

٣) أوجد فى ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^٤ = ٨١$ ب $س^٥ = ٢٤٣$ ج $س^٤ = -١٦$ د $س^٣ = -٦٤$

تفكير ناقد: وضح بمثال عددى الفرق بين الجذر السادس للعدد أ وبين $\sqrt[٦]{أ}$

## تعلم

### الأسس الكسرية *Rational Exponents*

**تعلمت** أن الجذر التربيعي للعدد الحقيقى غير السالب أ هو العدد الذى مربعه يساوى أ وبفرض $أ^م$ تمثل الجذر التربيعي الأساسى للعدد أ

∴ $(أ^م)^٢ = أ$ ∴ $أ^{٢م} = أ$ ومنها $٢م = ١$ ∴ $م = \frac{١}{٢}$

أى أن $أ^{\frac{١}{٢}}$ هى الجذر التربيعي الأساسى للعدد أ أى أن $\sqrt{أ} = أ^{\frac{١}{٢}}$

بالمثل $أ^{\frac{١}{٣}}$ هى **الجذر التكعيبى الأساسى للعدد أ** أى أن $\sqrt[٣]{أ} = أ^{\frac{١}{٣}}$ وعمومًا $\sqrt[ن]{أ} = أ^{\frac{١}{ن}}$

**تعريف**

١) لأى عدد حقيقي أ ≥ ٠، ن ∈ ص⁺ - {١} يكون $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما أ < ٠ ، ن عدد صحيح فردى أكبر من ١

٢) $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$ حيث أ ∈ ح، م، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، ن > ١، $\sqrt[ن]{أ}$ ∈ ح

## تعميم قوانين الأسس

### قوانين الأسس الكسرية تخضع لنفس قوانين الأسس الصحيحة

**مثال**

٣) أوجد قيمة كل مما يأتى (إن أمكن)

أ $(١٦)^{\frac{1}{4}}$ ب $-(٢٧)^{\frac{1}{3}}$ جـ $(-٢٤٣)^{\frac{1}{5}}$

د $(-٩)^{\frac{1}{2}}$ هـ $١٦^{\frac{3}{2}}$ و $(٢٧)^{-\frac{4}{3}}$

**الحل**

أ $(١٦)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{١٦} = ٢$

ب $-(٢٧)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{٢٧} = -٣$

جـ $(-٢٤٣)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-٢٤٣} = -٣$

د $(-٩)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-٩} \notin ع$ [لاحظ أن $\sqrt{-٩} = ٣ت$]

هـ $١٦^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{١٦})^{٣} = ٤^{٣} = ٦٤$

و $(٢٧)^{-\frac{4}{3}} = \frac{١}{٢٧^{\frac{4}{3}}} = \left(\frac{١}{\sqrt[3]{٢٧}}\right)^{٤} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{٤} = \frac{١}{٨١}$

**حاول أن تحل**

٤) أوجد قيمة كل مما يأتى (إن امكن):

أ $(١٢٥)^{\frac{1}{3}}$ ب $(-٨١)^{\frac{3}{4}}$ جـ $(١٢٨)^{-\frac{2}{7}}$ د $-(٣٤٣)^{\frac{2}{3}}$

**فسر لماذا؟**

العدد $(-٨)^{\frac{1}{3}}$ معرف فى ع $\sqrt[3]{-٨} = -٢ \in ع$ ، بينما العدد $(\sqrt{-٨})^{٢}$ غير معرف فى ع

### خواص الجذور النونية *Properties of n^th Roots*

١) $\sqrt[n]{أب} = \sqrt[n]{أ} \times \sqrt[n]{ب}$

٢) $\sqrt[n]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[n]{أ}}{\sqrt[n]{ب}}$ ، ب $\neq ٠$ حيث كل من $\sqrt[n]{أ}$ ، $\sqrt[n]{ب} \in ع$

**لاحظ أن**

$\sqrt[n]{أ^{n}} = |أ|$ إذا كان ن زوجى

$\sqrt[n]{أ^{n}} = أ$ إذا كان ن فردى

**مثال**

٤) أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $-\sqrt[3]{٨أ^{٦}ب^{٩}}$ ب $\sqrt[4]{١٦س^{٤}ص^{٨}}$

**الحل**

أ $-\sqrt[3]{٨أ^{٦}ب^{٩}} = -\sqrt[3]{٨} \times \sqrt[3]{أ^{٦}} \times \sqrt[3]{ب^{٩}} = -٢أ^{٢}ب^{٣}$

ب $\sqrt[4]{١٦س^{٤}ص^{٨}} = \sqrt[4]{١٦} \times \sqrt[4]{س^{٤}} \times \sqrt[4]{ص^{٨}} = ٢|س|ص^{٢}$

### حاول أن تحل

⑤ أوجد فى أبسط صورة كل من:

أ $\sqrt[٤]{١٦ أ^{١٢}}$ ب $\sqrt[٦]{(س + ٢ص)^{١٨}}$

### مثال

⑤ أوجد فى أبسط صورة كل من

أ $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$ ب $\frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times (١٤٧)^{\frac{١}{٦}}}{(٦٣)^{\frac{١}{٣}}}$

#### الحل

أ المقدار $= (٢ \times ٣^{٢})^{\frac{-١}{٢}} \times (٣ \times ٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}} \times (٣ \times ٢^{٣})^{\frac{-١}{٢}} = ٢^{\frac{-١}{٢}} \times ٣^{\frac{-٢}{٢}} \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{\frac{٣ \times ٢}{٢}} \times ٣^{\frac{-١}{٢}} \times ٢^{\frac{-٣}{٢}}$

$= ٢^{\frac{-١ + ٦ - ٣}{٢}} \times ٣^{\frac{-٢ + ٣ - ١}{٢}} = ٢^{\frac{٢}{٢}} \times ٣^{٠} = ٢ \times ١ = ٢$

ب المقدار $= \frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times (٣ \times ٧^{٢})^{\frac{١}{٦}}}{(٣^{٢} \times ٧)^{\frac{١}{٣}}} = \frac{٣^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٦}} \times ٧^{\frac{١}{٣}}}{٣^{\frac{٢}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٣}}}$

$= ٣^{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٦} - \frac{٢}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٣} - \frac{١}{٣}} = ٣^{٠} \times ٧^{٠} = ١ \times ١ = ١$

### حاول أن تحل

⑥ أثبت أن:

أ $\frac{(٣٤٣)^{٢س - \frac{١}{٣}} \times (٤)^{٣س + ١}}{(١٩٦)^{٣س} \times ٤} = \frac{١}{٧}$ ب $\frac{١٢٥ \times \sqrt[٨]{٤^{٣}} \times ١٠^{-\frac{١}{٤}}}{٤^{\frac{٥}{٨}} \times \sqrt[٤]{٦^{-٣}} \times ١٥^{\frac{٣}{٤}}} = ٢٥$

## حل المعادلات الآسية في ح

### مثال

⑥ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $س^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$ ب $(٢س + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

ج $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٣ س^{\frac{٢}{٣}} + ٣٦ = ٠$ د $\sqrt[٣]{س^{٥}} - ٣١ \sqrt[٦]{س^{٥}} = ٣٢$

#### الحل

أ $س^{\frac{٧}{٢}} = ١٢٨$

$س = (١٢٨)^{\frac{٢}{٧}}$ $س = (٢^{٧})^{\frac{٢}{٧}}$

$س = ٢^{٢} = ٤$ $\therefore$ م.ح $= \{٤\}$

ب $(٢س + ٣)^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$

$((٢س + ٣)^{\frac{٤}{٣}})^{٣} = (٣^{٤})^{٣}$ برفع الطرفين للقوة ٣

$(٢س + ٣)^{٤} = ٣^{١٢}$

> **لاحظ أن**
>
> إذا كان
>
> $س^{\frac{م}{ن}} = أ$
>
> فإن $س = أ^{\frac{ن}{م}}$
>
> حيث م عدد فردى
>
> إذا كان
>
> $س^{\frac{م}{ن}} = أ$
>
> فإن $س = \pm أ^{\frac{ن}{م}}$
>
> حيث م عدد زوجى
>
> م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

$٢س + ٣ = \pm (٣^{١٢})^{\frac{١}{٤}}$ $\qquad$ $٢س + ٣ = \pm ٣^{٣}$

إما $٢س + ٣ = ٢٧$ $\qquad$ $٢س = ٢٤$ $\qquad$ $\therefore$ $س = ١٢$

أو $٢س + ٣ = -٢٧$ $\qquad$ $٢س = -٣٠$ $\qquad$ $\therefore$ $س = -١٥$

م.ح = $\{١٢ ، -١٥\}$

**ج** $س^{\frac{٤}{٣}} - ١٣ س^{\frac{٢}{٣}} + ٣٦ = ٠$

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

إما $س^{\frac{٢}{٣}} - ٩ = ٠$ $\qquad$ أو $س^{\frac{٢}{٣}} - ٤ = ٠$

$س^{\frac{٢}{٣}} = ٣^{٢}$ $\qquad$ $س^{\frac{٢}{٣}} = ٢^{٢}$

$س = \pm (٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ $\qquad$ $س = \pm (٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$

$س = \pm ٢٧$ $\qquad$ $س = \pm ٨$

م.ح = $\{٢٧ ، -٢٧ ، ٨ ، -٨\}$

**د** $\sqrt[٣]{س^{٥}} - ٣١ \sqrt[٦]{س^{٥}} - ٣٢ = ٠$

$س^{\frac{٥}{٣}} - ٣١ س^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢ = ٠$

$(س^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢)(س^{\frac{٥}{٦}} + ١) = ٠$

إما $س^{\frac{٥}{٦}} - ٣٢ = ٠$ $\qquad$ أو $س^{\frac{٥}{٦}} + ١ = ٠$

$س^{\frac{٥}{٦}} = ٢^{٥}$ $\qquad$ $س^{\frac{٥}{٦}} = -١$ مرفوض

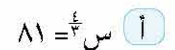
$س = (٢^{٥})^{\frac{٦}{٥}}$

$س = ٦٤$

م.ح = $\{٦٤\}$

**حاول أن تحل**

٧ أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:



أ $س^{\frac{٤}{٣}} = ٨١$ $\qquad$ ب $(س + ١)^{-\frac{٥}{٢}} = ٣٢^{-\frac{١}{٢}}$ $\qquad$ ج $\sqrt[٥]{س^{٤}} - ٣\sqrt[٥]{س^{٢}} = ٤$

## تمـــاريـن ٢ - ١

١ اختصر $\dfrac{\sqrt{٨} \times ٤^{-١} \times ٢^{-\frac{٣}{٢}}}{٦^{-٢} \times ٣^{٢}}$

٢ متى تكون العلاقة $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ صحيحة لجميع قيم أ ، ب الحقيقية.

٣ أكمل ما يأتى:

أ $(٨)^{\frac{٢}{٣}}$ فى أبسط صورة تساوى ..................

ب $(٦\frac{١}{٤})^{\frac{٣}{٢}}$ فى أبسط صورة تساوى ..................

ج $(\frac{١٦}{٦٢٥})^{-\frac{٣}{٤}}$ فى أبسط صورة تساوى ..................

د $\sqrt[٣]{(٣\frac{٣}{٨})^{-١}}$ فى أبسط صورة تساوى ..................

هـ $(٥^{٢} - ٣^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ فى أبسط صورة تساوى ..................

٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ إذا كان $٥^{س} = ٢$ فإن $٢٥^{س}$ تساوى .................. $(١٠ ، ٦٢٥ ، ٤ ، ٢)$

ب $(٢^{٧} \div ٢^{٥})^{-\frac{١}{٢}}$ تساوى .................. $(٢ ، -٢ ، \frac{١}{٢} ، -\frac{١}{٢})$

ج إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$ فإن س تساوى .................. $(٥١٢ ، ١٦ ، ٤ ، ٢)$

د أي مما يأتي لا يساوي $(\sqrt[٥]{س^{٤}})$ $\qquad$ $((\sqrt[٥]{س})^{٤} ، \sqrt[٤]{س^{٥}} ، س^{\frac{٤}{٥}} ، (س^{\frac{١}{٥}})^{٤})$

ه) إذا كان ٤ $س^{٥}$ = ١٢٨ فإن س تساوى ............ (٤ ، ±٢ ، ٢ ، -٢)

و) مجموعة الجذور الحقيقية للمعادلة $(س - ٢)^{٤}$ = ١٦ يساوي ............ ({صفر} ، {٤} ، {٨} ، {٠، ٤})

ز) إذا كان $٣^{أ} = ٤^{ب}$ فإن $٩^{\frac{أ}{ب}} + ١٦^{\frac{ب}{أ}}$ تساوى ............ (٧ ، ١٢ ، ٢٠ ، ٢٥)

## ٥) اكتشف الخطأ:

أ) $-٩ = (-٩)^{\frac{٢}{٢}} = \sqrt{(-٩)^{٢}} = \sqrt{٨١} = ٩$

ب) إذا كان $س^{٤}$ = ٨١ فإن $س = \sqrt[٤]{٨١}$ ∴ س = ٣

٦) **الربط بالهندسة:** إذا كان طول نصف قطر كرة نق يعطى بدلالة الحجم ع من العلاقة $نق = (\frac{٣ع}{٤\pi})^{\frac{١}{٣}}$ . أوجد الزيادة في طول نصف القطر عندما يتغير الحجم من $\frac{٣٢}{٣}\pi$ إلى $٣٦\pi$ وحدة مكعبة.

٧) أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٣٢}$

ب) $س^{٤} = ٨١$

جـ) $\sqrt[٣]{(س-١)^{٥}} = ٣٢$

د) $(س^{٢} - ٥س + ٩)^{\frac{٥}{٢}} = ٢٤٣$

هـ) $س^{\frac{٤}{٥}} - ٥س^{\frac{٢}{٥}} + ٤$ = صفر

و) $س + ١٥ = ٨\sqrt{س}$

ز) $\sqrt[٣]{س^{٢}} - ٢٥\sqrt[٣]{س} - ٥٤$ = صفر

ح) $(٢س - ١)^{٤} = (س + ٣)^{٤}$

٨) إذا كان $س^{\frac{٣}{٢}} = ٣ص^{\frac{٣}{٢}} = ٢٧$ فما قيمة س + ص

٩) **تفكير ابداعي:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

أ) إذا كان س $<$ صفر فإن: $\sqrt{س^{٢}} - \sqrt[٣]{س^{٣}} - \sqrt{س^{٢} - ٢س + ١} + ١$ = ............ (س ، -س ، صفر ، - ١)

ب) إذا كان $أ = \sqrt[٤]{\frac{\sqrt[٣]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ فأي الأعداد الآتية عدد نسبي ............ ($أ^{١٢}$ ، $أ^{١٦}$ ، $أ^{١٨}$ ، $أ^{٢٤}$)

## نشاط

استخدم الآلة الحاسبة في تبسيط إجراء العمليات الآتية (مقربًا الناتج إلى رقمين عشريين)

أ) $\sqrt[٣]{\frac{٧^{٤} \times ٣^{-٥}}{٢^{-٧}}}$

ب) $(٢٣)^{\frac{٣}{٢}} + (٠,٠١)^{\frac{٥}{٢}}$



# الدالة الأسية وتطبيقاتها

*Exponential Function and it Applications*

### سوف تتعلم
- الدالة الأسية.
- تمثيل الدوال الأسية بيانيًّا.
- خواص الدالة الأسية.

### المصطلحات الأساسية
- دالة أسية. *Expontential Function*
- نمو أسي. *Exponential Growth*
- تضاؤل أسي. *Exponential Decay*

### الأدوات المستخدمة
- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية.

### تذكر أن
**الدالة الجبرية:** يكون المتغير المستقل (س) هو الأساس أما الأس فهو عدد حقيقى.

**الدالة الأسية:** يكون المتغير المستقل (س) هو الأس أما الأساس فهو عدد حقيقي موجب لايساوى الواحد.

## نشاط

تتكاثر خلايا البكتريا بطريقة الانقسام المباشر إلى خليتين فى كل مرة خلال فترة زمنية محدودة ثم تنقسم الخليتين إلى أربع خلايا، ثم تنقسم الأربع إلى ثمانٍ، و يستمر انقسام الخلايا بنفس الطريقة خلال نفس الفترات الزمنية وفى نفس الظروف.

**يبين الجدول التالى زمن الانقسام لخلية البكتريا بالساعة وعدد الخلايا الناتجة.**

| الزمن بالساعة | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد الخلايا | ١ | ٢ | ٤ | ........... | ........... | ........... | ٦٤ |

١) أكمل الجدول السابق.

٢) عبِّر عن عدد خلايا كل انقسام بالصورة الأسية للأساس ٢.

٣) ماذا تتوقع أن تكون عدد الخلايا بعد مرور ٨ ساعات.

٤) عبِّر بالصورة الأسية عن عدد خلايا البكتريا بالانقسام بعد مرور س ساعة.



## تعلم

### الدالة الأسية Exponential Function

**تعريف ١**

تسمى الدالة د حيث $د(س) = أ^{س}$ حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١ ، س ∈ ح **بالدالة الأسية.**

**مثال:**

$د(س) = ٢^{س}$ دالة أسية **أساسها** (٢) و **أسها** (س).

$د(س) = ٥^{س+١}$ دالة أسية **أساسها** (٥) و **أسها** (س+١).

$د(س) = (\frac{١}{٣})^{٢س}$ دالة أسية **أساسها** $(\frac{١}{٣})$ و **أسها** (٢س)

### حاول أن تحل

١) بين أى الدوال الآتية دالة أسية.

أ) $د(س) = س^{٢}$ ب) $د(س) = (٢)^{س}$

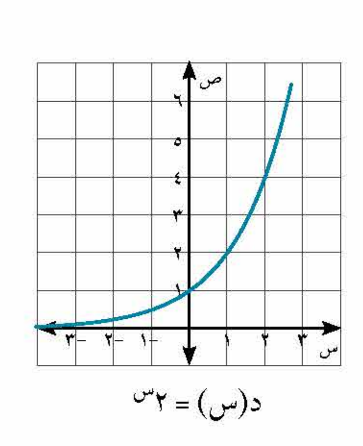
جـ) $د(س) = \frac{٣}{س + ١}$ د) $د(س) = س^{٣} - ١$

هـ) $د(س) = (\frac{٣}{٤})^{س-١}$ و) $د(س) = (-٢)^{س}$

## التمثيل البياني للدالة الأسية Graphical Representation of Exponential Function

مثل بيانيًا كل من الدالتين د(س) = $٢^{س}$ ، ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

وذلك على فترة اختيارية س ∋ [ -٣ ، ٣]



د(س) = $٢^{س}$

| س | $د_١(س)$ | $د_٢(س)$ |
|---|---|---|
| -٣ | $\frac{١}{٨}$ | ٨ |
| -٢ | $\frac{١}{٤}$ | ٤ |
| -١ | $\frac{١}{٢}$ | ٢ |
| صفر | ١ | ١ |
| ١ | ٢ | $\frac{١}{٢}$ |
| ٢ | ٤ | $\frac{١}{٤}$ |
| ٣ | ٨ | $\frac{١}{٨}$ |

ر(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$

**خواص الدالة الأسية** د(س) = $أ^{س}$ حيث أ > ٠ ، أ ≠ ١

١) مجال الدالة الأسية د(س) = $أ^{س}$ هو ع ومداها ]٠، ∞[

٢) إذا كان أ > ١ فإن الدالة تزايدية على مجالها وتسمى دالة نمو أسي معامله أ

أما إذا كان ١ > أ > ٠ فإن الدالة تناقصية على مجالها وتسمى دالة تضاؤل أسي معامله أ.

٣) منحنى الدالة د(س) = $أ^{س}$ يمر دائمًا بالنقطة (٠، ١) لجميع قيم أ > ٠ ، أ ≠ ١

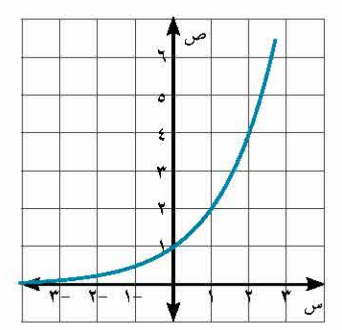
٤) د(س) = $أ^{س}$ هي دالة احادية (One - to - One)

٥) منحنى الدالة د(س) = $أ^{س}$ هو صورة منحنى الدالة د(س) = $(\frac{١}{أ})^{س}$ بالانعكاس على محور الصادات

٦) $أ^{س}$ ⟵ ∞ عندما س ⟵ ∞ حيث أ > ١

$أ^{س}$ ⟵ ٠ عندما س ⟵ ∞ حيث ١ > أ > ٠

### حاول أن تحل



٢) الشكل المقابل يمثل الدالة د المعرفة على ع ، حيث د(س) = $(٣)^{س}$. ارسم على نفس الشكل منحنى الدالة ر المعرفة على ع ، حيث ر(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$، ثم أوجد مجال ومدى كل من الدالتين، ثم بيِّن أى منهما تزايدية أو تناقصية مع ذكر السبب.

٣) تفكير ناقد: إذا كانت د(س) = $أ^{س}$ حيث ٠ > أ > ١ رتب كل مما يأتي ترتيبًا تصاعديًا د(٧) ، د(-٢) ، د($\sqrt{٥}$) ، د(٠).

### مثال

١) اذا كانت د (س) = $٣^{س}$ فأكمل ما يأتى:

أ) د(٢) = .........  ب) د(س + ٢) = ......... × د (س)  ج) د (س) × د (- س) = .........

**الحل**

أ) $د(٢) = ٣^{٢} = ٩$

ب) $د(س + ٢) = ٣^{س+٢} = ٣^{س} \times ٣^{٢} = ٩ د(س)$

ج) $د(س) \times د(-س) = ٣^{س} \times ٣^{-س} = ٣^{س-س} = ٣^{٠} = ١$

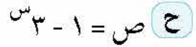
**حاول أن تحل**

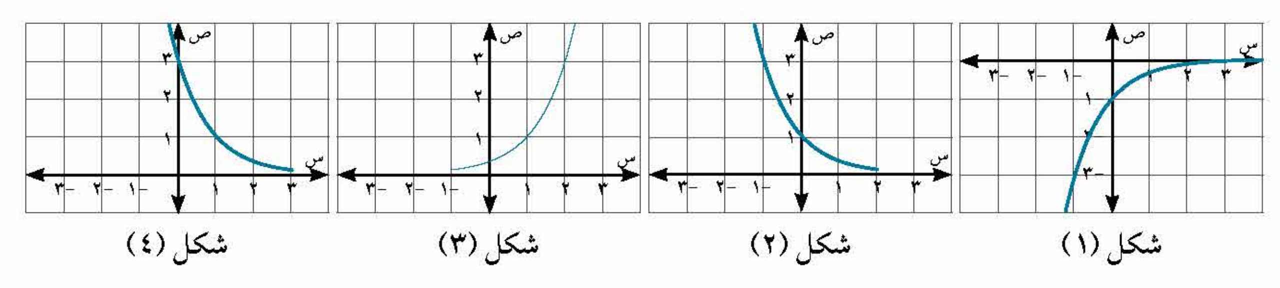
٤) في كل من التمارين الآتية اكتب قاعدة الدالة تحت الرسم البياني المناسب حيث:

أ) $ص = ٣^{س}$    ب) $ص = ٣^{-س}$    ج) $ص = -٣^{س}$

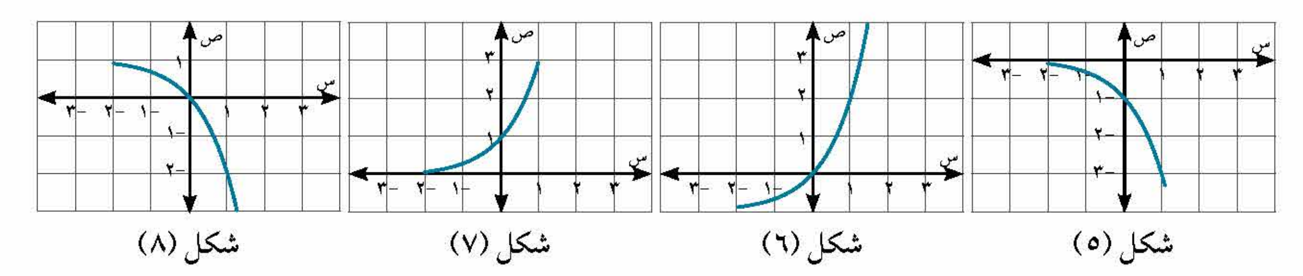
د) $ص = -٣^{-س}$    هـ) $ص = ٣^{س} - ١$    و) $ص = ٣^{س-١}$

ز) $ص = ٣^{١-س}$    ح) $ص = ١ - ٣^{س}$






شكل (١)    شكل (٢)    شكل (٣)    شكل (٤)




شكل (٥)    شكل (٦)    شكل (٧)    شكل (٨)

## تطبيقات تؤول إلى معادلات على الصورة $أ^{س} = ب$

### النمو والتضاؤل: *Growth and Decay*

يوجد العديد من الظواهر في الحياة اليومية يمكن أن تنمذج كدوال تصف هذه الظواهر من حيث النمو والتضاؤل أو (الأضمحلال) مع مرور الوقت، ومن أمثلة هذه الظواهر دراسة السكان والبكتريا والفيروسات، والمواد المشعة والكهرباء ودرجات الحرارة.

وفي مجال الجبر هناك دالتان يمكن استخدامهما بسهولة للتعبير عن مفهوم النمو ومفهوم التضاؤل (الاضمحلال) هما دالة النمو الأسى ودالة التضاؤل الأسى.

### أولًا: النمو الأسى *Exponential growth*

يمكن استخدام الدالة د، حيث $د(ن) = أ(١ + ر)^{ن}$ لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للنمو فى الفترة الزمنية الواحدة.

(ناقش معلمك لاستنتاج العلاقة السابقة).

الربح المركب: عند حساب جـ جملة مبلغ أ مستثمر في أحد البنوك التي تعطي ربح سنوي مركب ر (نسبة مئوية) لعدد ن من السنوات بفترات تقسيم العائد السنوي إلى س فإن جملة المبلغ تعطى بالعلاقة :

$$جـ = أ \left(1 + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$$

مثال

٢ أودع رجل مبلغ ٥٠٠٠ جنيه في أحد البنوك التي تعطي فائدة سنوية مركبة قدرها ٨ ٪، أوجد جملة المبلغ بعد مرور عشرة أعوام في كل من الحالات الآتية:

أ العائد السنوي ب العائد الربع سنوي جـ العائد الشهري

الحل

باستخدام العلاقة $جـ = أ \left(1 + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$ حيث س التقسيم السنوي :

(أ) العائد السنوي ∴ س = ١

$جـ = ٥٠٠٠ (١ + ٠,٠٨)^{١٠} = ١٠٧٩٤,٦٢$ جنيه

(ب) العائد ربع سنوي ∴ س = ٤

$جـ = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ \times ٤} = ١١٠٤٠,٢$ جنيه

(جـ) العائد الشهري ∴ س = ١٢

$جـ = ٥٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢} = ١١٠٩٨,٢$ جنيه .

حاول أن تحل

٥ يتكاثر النحل فى أحد الخلايا، فيزداد بمعدل ٢٥٪ كل أسبوع، فإذا كان عدد النحل فى البداية ٦٠ نحلة. اكتب دالة أسية تمثل عدد النحل بعد ن أسبوع، ثم قدر عدد النحل بعد ٦ أسابيع.

## ثانيًا: التضاؤل الأسى: *Exponential decay*

يمكن استخدام الدالة د حيث $د(ن) = أ (١ - ر)^{ن}$ لتمثيل التضاؤل الأسى بنسبة مئوية ثابتة فى فترات زمنية متساوية، حيث ن هى الفترة الزمنية، أ القيمة الابتدائية، ر النسبة المئوية للتضاؤل فى الفترة الزمنية الواحدة.

مثال

٣ الربط بالتجارة: اشترى كريم سيارة جديدة بمبلغ ١٢٠٠٠٠ جنيه، فإذا كان سعر السيارة يتناقص بمعدل ١٢٪ كل سنة.

**أولًا:** اكتب دالة أسية تمثل سعر السيارة بعد ن سنة من شرائها.

**ثانيًا:** احسب لأقرب جنيه سعر السيارة بعد مرور ٦ سنوات من شرائها.

الحل

أ = ١٢٠٠٠٠٠ ، ر = $\frac{١٢}{١٠٠}$ = ٠,١٢ ، الفترة الزمنية ن = ٦ سنوات

**أولًا: دالة التضاؤل الأسى هى:** د(ن) = أ(١ - ر)^ن **وبالتعويض عن قيم أ ، ر فإن:**

د(ن) = ١٢٠٠٠٠٠ (١ - ٠,١٢)^ن **أى أن:** د(ن) = ١٢٠٠٠٠٠ (٠,٨٨)^ن

**ثانيًا: بالتعويض عن ن = ٦ فى دالة النمو الأسى:**

د(٥) = ١٢٠٠٠٠٠(٠,٨٨)^٦ = ٥٥٧٢٨,٤٩٠٤١

سعر السيارة المتوقع بعد مرور ٦ سنوات يقدر بمبلغ ٥٥٧٢٨ جنيهًا

**حاول أن تحل**

٦ **الربط بالطب:** يتناول أحد المرضى ٤٠ مليجرامًا من عقار طبى، ويمكن لجسم المريض أن يتخلص من ١٠٪ من هذا العقار تقريبًا فى الساعة.

أ اكتب معادلة أسية تمثل كمية العقار المتبقية فى جسم هذا المريض بعد تناول العقار.

ب قدر كمية العقار المتبقية فى جسم المريض بعد ٤ ساعات من تناول العقار.

## تمــاريـن ٢ – ٢

١ أكمل ما يأتى:

أ تكون الدالة د حيث د(س) = أ^س دالة أسية إذا كانت أ ..............، س ..............

ب الدالة الاسية ر حيث ر(س) = ٣^(س-١) أساسها هو ..............

جـ الدالة و حيث و(س) = (-$\frac{١}{٢}$)^(س+١) ليست دالة أسية لأن ..............

د إحداثيا نقطة تقاطع الدالة الأسية د(س) = أ^س مع المستقيم س = ٠ هى النقطة (...... ، ......)

هـ معادلة محور التماثل لمنحنى الدالتين د، ر حيث: د(س) = ٣^س، ر(س) = ($\frac{١}{٣}$)^س هو ..............

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الاجابات الآتية:

أ تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تزايدية إذا كانت

(أ) أ > ٠ (ب) أ > ١ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) أ = ١

ب تكون الدالة الأسية التى أساسها أ تناقصية إذا كانت:

(أ) أ > ٠ (ب) أ < ٠ (جـ) ٠ < أ < ١ (د) -١ < أ < ٠

جـ الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^س ، أ > ١ يقترب خطها البيانى من:

(أ) محور السينات (الاتجاه الموجب) (ب) محور السينات (الاتجاه السالب)

(جـ) محور الصادات (الاتجاه الموجب) (د) محور الصادات (الاتجاه السالب)

د فى الدالة الأسية د حيث د(س) = أ^س ، أ > ١ تكون د(س) > ١ عندما:

(أ) س ∈ ع (ب) س ∈ $ع^+$ (جـ) س ∈ $ع^-$ (د) س ∈ ص

هـ في الدالة الأسية د حيث د(س) = $أ^س$ ، (٠ < أ < ١) تكون ٠ < $أ^س$ < ١ عندما س ∈

(أ) ]٠ ، ∞[ (ب) ]-∞ ، ٠[ (جـ) ]١ ، ∞[ (د) ]-∞ ، ١[

٣ بين أي من الدوال الآتية دالة أسية، ثم اكتب أسها وأساسها:

أ د(س) = ٢$س^٣$ ب د(س) = $\frac{٢}{٣}(٥)^س$ جـ د(س) = $\frac{١}{س - ١}$

د د(س) = ٣$س^٢$ - ١ هـ د(س) = $(\frac{٢}{٣})^{س-١}$ و د(س) = $(-٧)^س$

٤ مثّل الدالة د في كل مما يأتي بيانيًّا، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها، وبيّن أي منها تزايدية وأي منها تناقصية:

أ د(س) = $٣^س$ ب د(س) = $(\frac{١}{٢})^س$ جـ د(س) = -٣ $(٢)^س$ د د(س) = $٢^{س+١}$ + ١

هـ د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س+٢}$ - ٢ و د(س) = ٢ $(\frac{٢}{٣})^{س-١}$ + ١ ز د(س) = -$(\frac{١}{٢})^{٢س}$ + $\frac{٣}{٤}$

٥ **الربط بالأدخار:** أودع زياد مبلغ ٨٠٠٠٠ جنيه في أحد البنوك بفائدة سنوية ١٠,٥٪، كم يصبح جملة رصيده بالجنيه بعد ١٠ سنوات، علمًا بأن جملة الرصيد تعطى بالعلاقة:

جـ = م$(١ + ر)^ن$ حيث م المبلغ، ر النسبة المئوية للفائدة ، ن عدد السنوات

٦ **الربط بالاتصالات:** يتناقص عدد الهواتف الأرضية في إحدى المدن نتيجة انتشار الهواتف المحمولة بمعدل ١٠٪، فإذا كان عدد الهواتف في إحدى السنوات ٥٤٠٠٠ هاتف، فاكتب دالة أسية تمثل عدد هذه الهواتف بعد مرور ن سنة، ثم قدِّر عدد الهواتف بعد مرور ٣ سنوات.

٧ **الربط بالاستثمار:** بلغ عدد الأبقار في أحد مزارع الماشية ٨٠ بقرة، فإذا كان معدل التكاثر لهذه الأبقار يبلغ ١٨٪ سنويًّا تقريبًا، فأوجد عدد الأبقار في المزرعة بعد ٤ سنوات.

٨ **الربط بالسكان:** بلغ تعداد سكان إحدى المحافظات في جمهورية مصر العربية ٤,٦ مليون نسمة بمتوسط زيادة ٤ ٪ سنويًّا.

**أولًا:** اكتب دالة أسية تمثل النمو المستقبلي بعد ن سنة.

**ثانيًا:** قدِّر عدد سكان هذه المحافظة بعد مرور ٥ سنوات من وقت التعداد.

٩ **الربط بالرياضة:** يتناقص عدد المشجعين لإحدى فرق كرة القدم بمعدل ٤٪ نتيجة خسارتها في إحدى الدورات الرياضية، فإذا كان عدد المشجعين في أول مباراة ٣٦٤٠٠ فاكتب دالة أسية تمثل عدد الحضور (ص) في المباراة (ن)، ثم قدر عدد المشجعين في المباراة العاشرة.

١٠ **تفكير إبداعي:** إذا كان د(س) = $٢^{٣س}$ فأثبت أن المقدار $\frac{١}{د(س) + ١}$ + $\frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س

# ٢ - ٣ المعادلات الأسية

*Exponential Equations*

**سوف تتعلم**

- حل المعادلة الأسية جبريًا.
- حل المعادلة الأسية بيانيًا.

**المصطلحات الأساسية**

- معادلة أسية *Exponential Equation*
- الحل البياني *Graphical Solution*

**الأدوات المستخدمة**

- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.
- آلة حاسبة علمية.

## استكشف

من الجدول الآتي بين متى تتساوى $٢^{س}$ مع ٢س:

| س | -٢ | -١ | ٠ | ١ | ٢ | ٣ | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢س | -٤ | -٢ | ٠ | ........... | ........... | ........... | ........... |
| $٢^{س}$ | $\frac{١}{٤}$ | $\frac{١}{٢}$ | ١ | ........... | ........... | ........... | ........... |



## تعلم

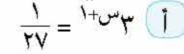
### المعادلة الأسية *Exponential Equation*

إذا تضمنت المعادلة متغيرًا في الأس، فإنها تسمى معادلة أسية مثل ($٣^{س} = ٢٧$) فنجد:

**أولًا:** إذا كان $أ^{م} = أ^{ن}$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن م = ن.

### مثال

١) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:



أ) $٣^{س+١} = \frac{١}{٢٧}$ ب) $(٢\sqrt{٢})^{س-٣} = ٨^{س-٢}$

**الحل**

أ) $٣^{س+١} = \frac{١}{٢٧}$ ∴ $٣^{س+١} = ٣^{-٣}$

∴ س + ١ = -٣ ومنها س = -٤ ∴ مجموعة الحل = {-٤}

ب) $(٢\sqrt{٢})^{س-٣} = ٨^{س-٢}$ ∴ $(٢ \times ٢^{\frac{١}{٢}})^{س-٣} = (٢^{٣})^{س-٢}$

∴ $(٢^{\frac{٣}{٢}})^{س-٣} = (٢^{٣})^{س-٢}$ ∴ $٢^{\frac{٣}{٢}(س-٣)} = ٢^{٣(س-٢)}$

∴ $\frac{٣}{٢}س - \frac{٩}{٢} = ٣س - ٦$ بالضرب في ٢

∴ ٣س - ٩ = ٦س - ١٢ ∴ ٣س - ٦س = ٩ - ١٢

-٣س = -٣ ومنها س = ١ ∴ مجموعة الحل = {١}

### حاول أن تحل

١) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $٢^{س-٣} = \frac{١}{١٦}$ ب) $\frac{(٣^{٢} + ٥^{٢})^{س}}{٦٨^{س}} = \frac{١}{٣٢}$

**ثانيًا:** إذا كان $أ^{م} = ب^{م}$ حيث أ، ب $\notin \{٠، ١، -١\}$، فإن

إما: م = صفر

أو: أ = ب عندما م عدد فردي ، أ = ± ب عندما م عدد زوجي.

## مثال

(٤) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$　　　ب $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$

### الحل

أ $٢^{س-٣} = ٥^{س-٣}$　　∴ س - ٣ = صفر　　ومنها س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

ب $٧^{س+١} = ٣^{٢س+٢}$　　∴ $٧^{س+١} = ٣^{٢(س+١)}$　　∴ $٧^{س+١} = ٩^{س+١}$

∴ س + ١ = صفر　　ومنها س = -١　　∴ مجموعة الحل = {-١}

### حاول أن تحل

(٢) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات

أ $٣^{س-٥} = ٢^{س-٥}$　　　ب $٤^{س+٢} = ٣^{٢س+٤}$

**تفكير ناقد:** أوجد جميع الحلول الممكنة للمعادلة $س^{س-٢} = ٤^{س-٢}$

## مثال

(٥) إذا كانت د(س) = $٣^{س}$

أ أثبت أن د(س + ٢) × د(س - ٢) = د(٢س)　　　ب إذا كان د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢ أوجد قيمة س

### الحل

أ الطرف الأيمن = د(س + ٢) × د(س -٢) = $٣^{س+٢} × ٣^{س-٢}$

= $٣^{س+٢+س-٢}$ = $٣^{٢س}$ = د(٢س) = الطرف الأيسر

ب ∵ د(س + ١) - د(س - ١) = ٧٢　　∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س+١} - ٣^{س-١} = ٧٢$

∴ $٣^{س+١}(٣^{٢} - ١) = ٧٢$

∴ $٣^{س-١} = ٩ = ٣^{٢}$　　∴ س - ١ = ٢　　∴ س = ٣

### حاول أن تحل

(٣) إذا كان $د_{١}(س) = ٨^{س}$ ، $د_{٢}(س) = ٤^{س}$

أ أثبت أن $\frac{د_{١}(٢س + ١) + د_{٢}(٣س + ٢)}{د_{١}(٢س - ١) + د_{٢}(٣س - ٢)} = ١٢٨$　　　ب حل المعادلة $د_{١}(٢س) + د_{٢}(٣س - ١) = ٨٠$

### مثال

⑥ إذا كانت د(س) = $٢^{س}$

أوجد س التى تحقق المعادلة: د(س) + د(٥ - س) = ١٢:

**الحل**

بالتعويض فى المعادلة د(س) + د(٥ - س) = ١٢

$٢^{س} + ٢^{٥-س} = ٢$

$٢^{س} × ٢^{س} + ٢^{٥-س} × ٢^{س} = ١٢ × ٢^{س}$ وذلك بضرب الطرفين فى $٢^{س}$

٢ س + س + ٢٥ - س + س - ١٢ × ٢س = ٠

$٢^{٢س} - ١٢ × ٢^{س} + ٣٢ = ٠$ وبتحليل المقدار الثلاثى

$(٢^{س} - ٤)(٢^{س} - ٨) = ٠$

**إما:** $٢^{س} = ٢^{٢}$ ومنها س = ٢

**أو:** $٢^{س} = ٢^{٣}$ ومنها س = ٣

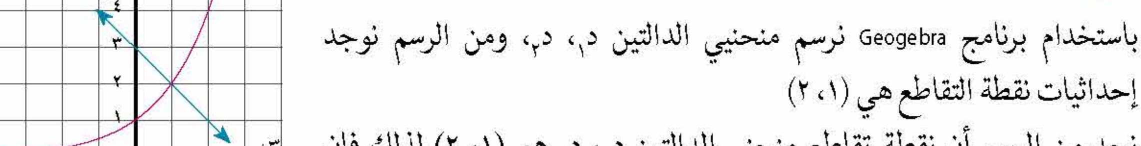
**حاول أن تحل**

④ فى المثال السابق أثبت أن: $\frac{د(س + ١)}{د(س - ١)} + \frac{د(س - ١)}{د(س + ١)} = \frac{١٧}{٤}$

## حل المعادلات الأسية بيانيًا *Solving Exponential Equastions Graphically*

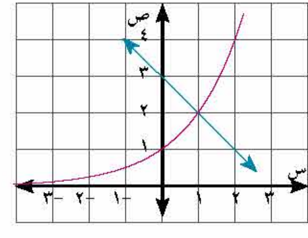


### نشاط



⑦ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم في شكل واحد منحنيي كل من الدالتين $د_١(س) = ٢^{س}$، $د_٢(س) = ٣ - س$، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = ٣ - س$

**الحل**




باستخدام برنامج Geogebra نرسم منحنيي الدالتين $د_١$، $د_٢$، ومن الرسم نوجد إحداثيات نقطة التقاطع هي (١، ٢)

نجد من الرسم أن نقطة تقاطع منحنى الدالتين $د_١$، $د_٢$ هو (١، ٢) لذلك فإن مجموعة حل المعادلة: ٢س = ٣ - س هو {١}.



**حاول أن تحل**

⑤ باستخدام أحد البرامج الرسومية ارسم كلًّا من الدالتين:

$د_١(س) = ٢^{س}$ ، $د_٢(س) = س + ٢$ ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة $٢^{س} = س + ٢$

## تمـــارين ٢ – ٣

**١** اختر الإجابة الصحيحة:

أ إذا كان $٢^{س+١} = ٨$ ، فإن س = ..................

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٣

ب إذا كان $٥^{س-١} = ٤^{س-١}$، فإن س = ..................

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

جـ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{أ^{٢}-أ-٢} = ١$ حيث أ > صفر، فإن أ = ..................

(أ) ١ (ب) -٣ (جـ) ٢ (د) ٣

**٢** أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ $٢^{س+١} = ٤$ ب $٣^{س-١} = \frac{١}{٩}$ جـ $٧^{س-٢} = ١$

د $٥^{س+٣} = ٤^{س+٣}$ هـ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$ و $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

ز $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$ ح $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$ ط $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+١} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٣} + \left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٥} = ٨٤$

**٣** أوجد مجموعة حل المعادلتين:

$٣^{س} \times ٥^{ص} = ٧٥$ ، $٣^{ص} \times ٥^{س} = ٤٥$

**٤** إذا كانت $د_{١}(س) = ٣^{س}$ ، $د_{٢}(س) = ٩^{س}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د_{١}(٢س-١) + د_{٢}(س+١) = ٧٥٦$

**٥** إذا كانت $د(س) = ٧^{س+١}$ فأوجد قيمة س التي تحقق $د(٢س - ١) + د(س - ٢) = ٥٠$

**٦** أوجد بيانيًّا مستخدمًا أحد برامج الرسوميات مجموعة حل المعادلة:

أ $٣^{س-٢} = ٣ - س$ ب $٢^{س} = ٢س$

**٧** تفكير إبداعي: إذا كان $س^{٣} = ص^{٢}$ وكان $س^{ن+١} = ص^{ن-١}$ فما قيمة ن ؟

**٨** الربط بالأعداد: إذا كان مجموع الأعداد $٢ + ٤ + ٨ + ١٦ + ........ + ٢^{ن}$ يُعطى بالعلاقة $جـ_{ن} = ٢(٢^{ن} - ١)$

أ أوجد مجموع العشرة أعداد الأولى في النمط

ب أوجد عدد الحدود في النمط ابتداء من الحد الأول ليكون مجموعها ١٣١٠٧٠

**٩** حل كُلًّا من المعادلات الآتية:

أ $٣^{س^{٢}-٤٢} = \left(\frac{١}{٣}\right)^{س}$ ب $٧^{٢-س} + ٧^{-س} = ٥٠$

**١٠** تفكير ابداعي:

**أوجد مجموعة حل المعادلة:**

$٩^{س+١} - ٣^{س+٣} - ٣^{س} + ٣ = ٠$ .

# ٢ - ٤ الدالة العكسية

## The Inverse Function

### سوف تتعلم

- الدالة العكسية.
- التمثيل البياني للدالة العكسية.
- إيجاد الدالة العكسية لدالة بيانيًا وجبريًا.

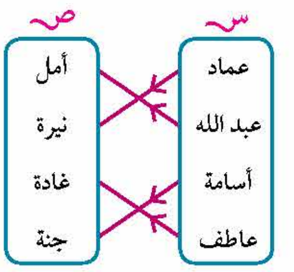
### المصطلحات الأساسية

- دالة Function
- دالة عكسية Inverse Function
- دالة أحادية One – to One Function
- مجال Domain
- مدى Range
- انعكاس Reflection

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة.
- برامج رسومية.
- حاسب آلي.

## فكر و ناقش




الشكل المقابل يمثل علاقة (أب) بين مجموعة من الآباء سـ = {عماد، عبد الله، أسامة، عاطف} وبناتهم صـ = {أمل، نيرة، غادة، جنة} بالاستعانة بالشكل.

١) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "أب" من سـ إلى صـ

هل العلاقة تمثل دالة؟ و إذا كانت دالة هل هي دالة أحادية؟

٢) اكتب بيان العلاقة التي تمثل "إبنة" من صـ إلى سـ هل العلاقة تمثل دالة؟

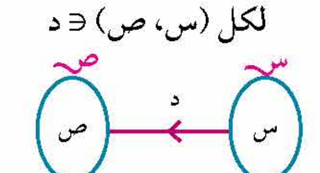


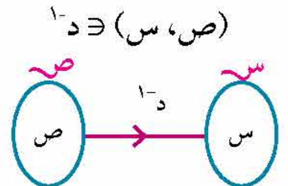
## تعلم

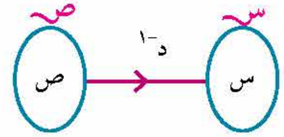
### الدالة العكسية The Inverse Function

إذا كانت الدالة د دالة أحادية (One-to-One) من مجموعة سـ إلى مجموعة صـ، فإن الدالة $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من صـ إلى سـ إذا كان:

لكل (س، ص) ∈ د فإن (ص، س) ∈ $د^{-1}$




### مثال

١) إذا كانت د دالة بيانها كالآتي: د = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}.

أوجد بيان الدالة العكسية للدالة د ومثلهما في شكل واحد.

#### الحل

حيث إن الدالة المعطاة أحادية، فإن لها معكوسًا.

∵ د(س) = {(١، ٢)، (٢، ٤)، (٣، ٦)، (٤، ٨)}

∴ $د^{-1}$(س) = {(٢، ١)، (٤، ٢)، (٦، ٣)، (٨، ٤)}

**نلاحظ أن** الدالة د والدالة العكسية $د^{-1}$ متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س

**أي أن** $د^{-1}$ (س) هي صورة د(س) بالانعكاس في المستقيم ص = س

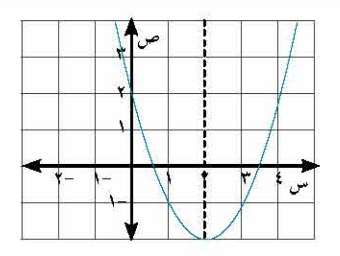
## حاول أن تحل

(١) أوجد بيان الدالة العكسية للدالة التي يمثلها الجدول الآتي:

| س | -٣ | -٢ | -١ | ٠ | ١ |
|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | ٧ | ٣ | ١ | ٠ | $\frac{١}{٢}$ |

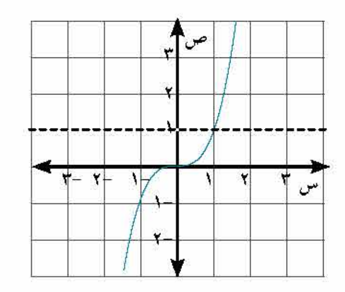
**اختبار الخط الرأسي**

إذا قطع أي خط رأسي منحنى ما في نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة.



**اختبار الخط الأفقي**

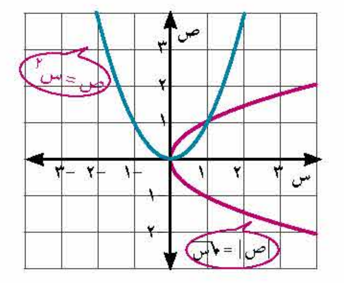
إذا قطع أي خط أفقي منحنى دالة ما في نقطة واحدة، على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية.



### لاحظ أن:

إذا كانت الدالة ليست أحادية (لا تحقق اختبار الخط الأفقي) فإن معكوسها لا يمثل دالة.

مثل ص = س$^{٢}$ (ليست أحادية) معكوسها |ص| = $\sqrt{س}$ لا يمثل دالة.



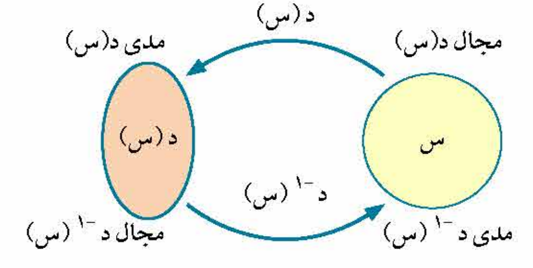

### من خواص الدالة العكسية:

١- يقال أن د(س) ، ر(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان

( د ∘ ر ) (س) = س    و    ( ر ∘ د ) (س) = س

٢- مجال الدالة د(س) = مدى الدالة العكسية د$^{-١}$(س)

مدى الدالة د(س) = مجال الدالة العكسية د$^{-١}$ (س)




### تفكير ناقد:

ما مجال الدالة د حيث د(س) = س$^{٢}$ التي يكون فيه للدالة د دالة عكسية، وأوجد هذه الدالة العكسية.

### مثال

(٢) أوجد الدالة العكسية للدالة د حيث د(س) = ٢س + ١ ومثّل الدالة ومعكوسها بيانيًّا في شكل واحد.

**لاحظ أن**

لإيجاد الدالة العكسية أولًا نقوم بتبديل المتغيرات، ثم نوجد ص بدلالة س.

الحل

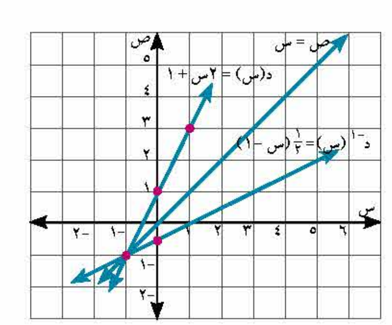
ص = ٢س + ١

∴ س = ٢ص + ١     بتبديل المتغيرات

∴ ٢ص = س - ١

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ (س - ١)     أي د$^{-١}$(س) = $\frac{١}{٢}$ (س - ١)

| س | ١ | ٠ | ١- |
|---|---|---|---|
| د(س) | ٣ | ١ | ١- |
| د$^{-١}$(س) | ٠ | $\frac{١-}{٢}$ | ١- |




نلاحظ أن الدالة د والدالة العكسية د$^{-١}$ منحناهما متماثلان بالنسبة للمستقيم ص = س



حاول أن تحل

(٢) أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س$^{٣}$ ومثلهما في شكل واحد.



## مثال

(٣) إذا كانت د دالة بحيث د(س) = ٣ + $\sqrt{\text{س - ١}}$ فأوجد

أ) مجال د(س) ومدى د(س)     ب) د$^{-١}$ (س) وعين مجالها ومداها

الحل

أ) د(س) معرفة لجميع قيم س - ١ ≥ ٠     أي س ≥ ١

∴ مجال د(س) = [ ١ ، ∞[

∵ $\sqrt{\text{س - ١}}$ ≥ ٠     لجميع قيم س الواقعة في مجال الدالة

∴ ٣ + $\sqrt{\text{س - ١}}$ ≥ ٣   ⇐   د(س) ≥ ٣

∴ مدى د(س) = [ ٣، ∞[

ب) ∵ ص = ٣ + $\sqrt{\text{س - ١}}$

باستبدال المتغيرات س ، ص

س = ٣ + $\sqrt{\text{ص - ١}}$     س - ٣ = $\sqrt{\text{ص - ١}}$     بتربيع الطرفين

(س - ٣)$^{٢}$ = ص - ١

∴ ص = (س - ٣)$^{٢}$ + ١     ∴ د$^{-١}$(س) = (س - ٣)$^{٢}$ + ١

مجال د$^{-١}$(س) = [٣ ، ∞[ ومداها [١ ، ∞[

**حاول أن تحل**

(٣) إذا كانت د: ع$^+$ ⟵ ع بحيث د(س) = $\frac{١}{س^٢+١}$

أ) أوجد د$^{-١}$(س) وعين مجالها ومداها

ب) مستخدمًا أحد البرامج الرسومية ارسم الشكل البياني لكل د(س) ، د$^{-١}$(س)

## تمـــارين ٢ – ٤

(١) أكمل:

أ) إذا كانت الدالة د = {(١، ٤)، (٢، -٣)، (٣، ١)، (٤، ٠)} فإن د$^{-١}$ = ..................

ب) الشكل المقابل يمثل دالة د: س ⟵ ص فإن د$^{-١}$ (٢) = ..................

جـ) صورة النقطة (٢، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة ..................

د) إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٢) = ٦ فإن د$^{-١}$ (٦) = ..................

هـ) إذا كان د: س ⟵ ٤س فإن د$^{-١}$: س ⟵ ..................



(٢) ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

أ) مجال الدالة هو مجال الدالة العكسية لها. (..................)

ب) الدالة المتزايدة على مجالها يكون دائمًا لها دالة عكسية. (..................)

جـ) الدالة الزوجية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..................)

د) الدالة الفردية يكون لها دائمًا دالة عكسية. (..................)

(٣) أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية:

أ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤

ب) د (س) = ٤س

جـ) د(س) = ٥ + $\frac{٤}{س}$

د) د (س) = $\frac{٣}{س}$

هـ) د(س) = ٨ س$^٣$ - ١

و) د (س) = $\sqrt[٣]{٤ - س}$

ز) د(س) = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$

ح) د (س) = س$^٢$ حيث س ⩾ صفر

ط) د(س) = (س - ١)$^٢$ + ٢ حيث س ⩾ ١

ى) د(س) = س$^٢$ + ٨ س + ٧ حيث س ⩾ -٤

ك) د(س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ حيث -٣ ⩽ س ⩽ ٠

ل) د(س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ حيث ٠ ⩽ س ⩽ ٣

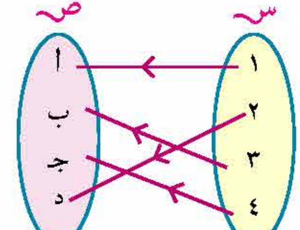
م) د = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤)}

ن)

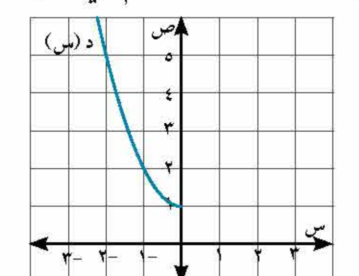
| س | -٢ | ١ | ٢ | ٥ |
|---|---|---|---|---|
| د(س) | ٧ | ٤ | ١ | -١ |

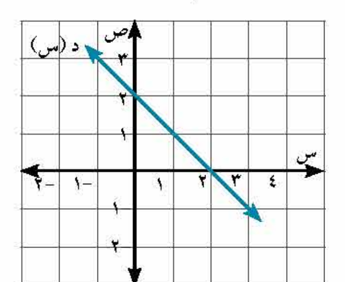
④ (أ) إذا كانت د(س) = ٥س. أوجد $د^{-1}$(س) ومثلهما بيانيًا.

(ب) الشكل المقابل يمثل دالة د من سـ إلى صـ فأوجد قيمة $د^{-1}$ (ب) + ٢ $د^{-1}$(جـ).




⑤ في كل من الأشكال الآتية. ارسم في نفس الشكل منحنى الدالة العكسية $د^{-1}$(س)




⑥ اكتشف الخطأ:

حاول كل من وائل ورنا إيجاد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{س - ٥}{س}$

**حل وائل**

∵ د(س) = $\frac{س - ٥}{س}$

∵ $د^{-1}$(س) = $\frac{١}{د(س)}$

∴ $د^{-1}$(س) = ١ ÷ $\frac{س - ٥}{س}$

= ١ × $\frac{س}{س - ٥}$

$د^{-1}$(س) = $\frac{س - ٥}{س}$

**حل رنا**

∵ ص = $\frac{س - ٥}{س}$

∴ س = $\frac{ص - ٥}{ص}$ بتبديل المتغيرات

∴ ص س = ص - ٥ بالضرب التبادلي

∴ ص س - ص = -٥

∴ ص (س - ١) = -٥

∴ $د^{-1}$(س) = $\frac{-٥}{س - ١}$

أي من الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

⑦ سؤال مفتوح: هل يمكن أن تكون الدالة د هي نفسها الدالة العكسية $د^{-1}$؟ إن كانت العبارة صحيحة أعط أمثلة على ذلك.

⑧ في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية:

(أ) د(س) = $س^{٢}$ (ب) د (س) = $س^{٣}$ (جـ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س

# ٢ - ٥ الدالة اللوغاريتمية وتمثيلها البياني

*Logarithmic Function and Its Graph*

**سوف تتعلم**

- تعريف الدالة اللوغاريتمية.
- التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية.
- التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس.
- حل بعض المعادلات اللوغاريتمية البسيطة.

**المصطلحات الأساسية**

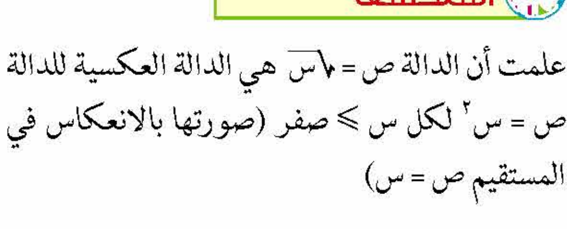
- لوغاريتم Logarithm
- دالة عكسية Inverse Function
- مجال Domain
- اللوغاريتم المعتاد Common Logarithm

**الأدوات المستخدمة**

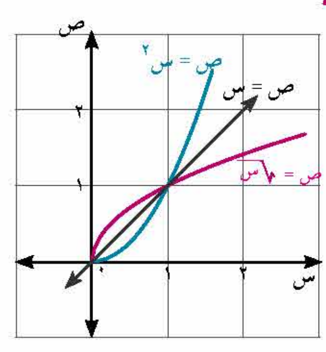
- آلة حاسبة.
- حاسب آلي.

## التمثيل البياني للدالة العكسية للدالة الأسية

### استكشف



علمت أن الدالة $ص = \sqrt{س}$ هي الدالة العكسية للدالة $ص = س^٢$ لكل $س \geqslant$ صفر (صورتها بالانعكاس في المستقيم ص = س)




فهل يمكنك تمثيل الدالة العكسية للدالة الأسية د حيث $د(س) = ٢^{س}$ بيانيًّا من خلال تمثيل قيم س، ص للأزواج المرتبة التي تمثل الدالة.

**$ص = ٢^{س}$**

| س | ص |
|---|---|
| ٣- | $\frac{١}{٨}$ |
| ٢- | $\frac{١}{٤}$ |
| ١- | $\frac{١}{٢}$ |
| ٠ | ١ |
| ١ | ٢ |
| ٢ | ٤ |
| ٣ | ٨ |

**$س = ٢^{ص}$**

| س | ص |
|---|---|
| $\frac{١}{٨}$ | ٣- |
| $\frac{١}{٤}$ | ٢- |
| $\frac{١}{٢}$ | ١- |
| ١ | ٠ |
| ٢ | ١ |
| ٤ | ٢ |
| ٨ | ٣ |

نجد مما سبق أن معكوس $ص = ٢^{س}$ هو $س = ٢^{ص}$ ويسمى المتغير ص في المعادلة $س = ٢^{ص}$ لوغاريتم س. ويكتب $ص = لو_{٢}\ س$ ويقرأ **ص تساوي لوغاريتم س للأساس ٢**



### تعلم

## الدالة اللوغاريتمية *Logarithmic Function*

إذا كان $أ \in ع^{+} - \{١\}$ فإن الدالة د حيث $د: ع^{+} \longrightarrow ع$ حيث $د(س) = لو_{أ}\ س$ هى الدالة العكسية للدالة $ص = أ^{س}$

وتسمى $د(س) = لو_{أ}\ س$ بالدالة اللوغاريتمية

- مجال الدالة اللوغاريتمية = $ع^{+}$
- مدى الدالة اللوغاريتمية = ع
- الصورة $ص = لو_{أ}\ س$ تكافئ الصورة $أ^{ص} = س$

**إرشادات للدراسة**

تسمى $لو_{أ}\ س = ص$ بالصورة اللوغاريتمية

وتسمى $أ^{ص} = س$ بالصورة الأسية المكافئة لها.

**التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية:**

أ $٢^{٤} = ١٦$ تكافئ $لو_{٢} ١٦ = ٤$ ب $٥^{٢} = ٢٥$ تكافئ $لو_{٥} ٢٥ = ٢$

جـ $(\frac{١}{٢})^{٤} = \frac{١}{١٦}$ تكافئ $لو_{\frac{١}{٢}} \frac{١}{١٦} = ٤$ د $١٠^{-٢} = ٠,٠١$ تكافئ $لو_{١٠} ٠,٠١ = -٢$

**حاول أن تحل**

(١) حول من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية

أ $٧^{٢} = ٤٩$ ب $(\sqrt{٢})^{١٠} = ٥١٢$ جـ $(\frac{٣}{٥})^{٤} = \frac{٨١}{٦٢٥}$ د $٥^{-٣} = \frac{١}{١٢٥}$

**اللوغاريتمات المعتادة للأساس ١٠:**

إذا كان أساس اللوغاريتم ١٠ يسمى باللوغاريتم المعتاد ويكتب بدون أساس.

مثل: $لو_{١٠} ٧$ تكتب لو٧ $لو_{١٠} ١٢٧$ تكتب لو١٢٧

**التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:**

أ $لو_{٣} ٨١ = ٤$ تكافئ $٣^{٤} = ٨١$ ب $لو_{٢} ١٢٨ = ٧$ تكافئ $٢^{٧} = ١٢٨$

جـ $لو \frac{١}{١٠٠} = -٢$ تكافئ $١٠^{-٢} = \frac{١}{١٠٠}$ د $لو_{٨١} ٢٧ = \frac{٣}{٤}$ تكافئ $٨١^{\frac{٣}{٤}} = ٢٧$

**حاول أن تحل**

(٢) حول من الصورة اللوغاريتمية للصورة الأسية:

أ $لو_{٥} ١٢٥ = ٣$ ب $لو_{٣} \frac{١}{٢٤٣} = -٥$ جـ $لو_{٤} ١ = ٠$ د $لو ١٠٠٠ = ٣$

**مثال**

**حساب قيمة لوغاريتم عدد لأساس معلوم**

(١) أوجد قيمة كل مما يأتي:

أ لو٠,٠٠١ ب $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧}$

**الحل**

أ بوضع ص = لو ٠,٠٠١

بالتحويل إلى الصورة الأسية:

$١٠^{ص} = ٠,٠٠١$

$١٠^{ص} = (\frac{١}{١٠})^{٣}$ وضع العدد بالصورة الأسية

$١٠^{ص} = (١٠)^{-٣}$ من خواص الأسس

ص = -٣ لذلك فإن لو ٠,٠٠١ = -٣

ب بوضع ص = $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧}$

بالتحويل إلى الصورة الأسية

$٣^{ص} = ٣^{\frac{٣}{٤}}$ من خواص الأسس

ص = $\frac{٣}{٤}$

لذا فإن $لو_{٣} \sqrt[٤]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

**حاول أن تحل**

(٣) أوجد قيمة كل من: أ لو ٠,٠٠٠٠١ ب $لو_{\frac{١}{٢}} ١٢٨$

## مثال

(٢) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $لو_{٣} (٢س - ٥) = ١$ ب) $لو_{س} (س + ٢) = ٢$

**الحل**

أ) المعادلة لكل قيم س التي تحقق ٢س - ٥ > صفر؛ أي س > $\frac{٥}{٢}$ (مجال تعريف المتغير)

**وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة**

∴ $٣^{١} = ٢س - ٥$ ∴ ٢ س = ٨

∴ س = ٤ ∈ مجال تعريف المتغير ∴ مجموعة الحل هي {٤}

ب) المعادلة معرفة لقيم س التي تحقق { س + ٢ > صفر ، س > صفر ، س ≠ ١ } أي { س > -٢ ، س > صفر ، س ≠ ١ }

أي ]صفر، ∞[ - {١} (مجال تعريف المتغير)

**وبتحويل المعادلة للصورة الأسية المكافئة**

∴ $س^{٢} = س + ٢$ ∴ $س^{٢} - س - ٢ = صفر$

∴ (س - ٢) (س + ١) = صفر ∴ س = ٢ أو س = -١

∵ س = -١ ∉ مجال تعريف المتغير ∴ مجموعة الحل = {٢}

**حاول أن تحل**

(٤) أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

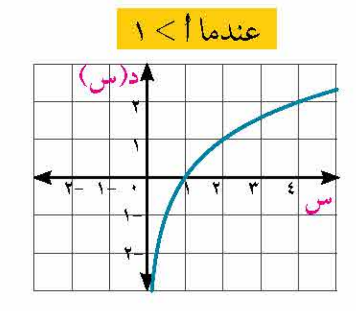
أ) $لو_{٨١} س = \frac{٣}{٤}$ ب) $لو_{س} ٥س = ٢$



**التمثيل البياني للدالة اللوغاريتمية:** *Graphical Representation of the Logarithmic Function*

تمثل الدالة د حيث د(س) = $لو_{أ}$ س حيث أ ≠ ١ بيانيًّا كما في الأشكال الآتية:

عندما أ > ١

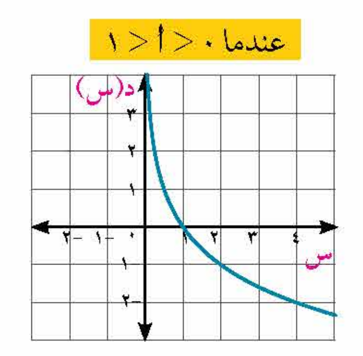



**المجال:** $ع^{+}$

**المدى:** ع

**التقاطع مع محور س:** (١، ٠)

**الاطراد:** تزايدية $ع^{+}$




**المجال:** $ع^+$

**المدى:** ع

**التقاطع مع محور س:** (١، ٠)

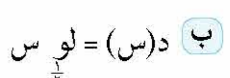
**الاطراد:** تناقصية على مجالها $ع^+$

**تفكير ناقد:** هل يمكنك استنتاج العلاقة بين منحنى الدالة الأسية ومنحنى الدالة اللوغاريتمية وضح ذلك.

## مثال

(٣) مثل الدوال الآتية بيانيًا:

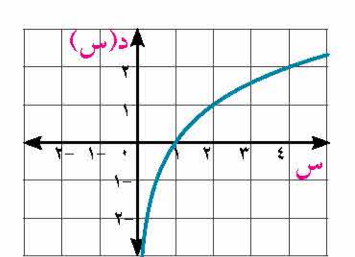
أ) د(س) = $لو_{٢}$ س

ب)  د(س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س

**الحل**

أ) **لاحظ أن: الأساس** ٢ > ١

| س | ٢ | ١ | ٤ |
|---|---|---|---|
| د(س) | ١ | ٠ | ٢ |




ب) **لاحظ أن:** الأساس: ٠ < $\frac{١}{٢}$ < ١

| س | ٢ | ١ | ٤ |
|---|---|---|---|
| د(س) | ١- | ٠ | ٢- |

### استخدام الآلة الحاسبة:

يمكن استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد اللوغاريتمات على النحو الآتي:

١) **لإيجاد** $لو_{٢}$ ٤ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية: log 2 REPLAY 4 = 2

٢) **لإيجاد** لو ٣٨ نتبع تسلسل المفاتيح الآتية: log 3 8 = 1.579783597

**تدريب**

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل من:

أ) $لو_{٣}$ ١٢ ب) $لو_{٣}$ ٢٤ ب) $لو_{٣}$ $\frac{١}{٢٧}$ د) لو ١٢٨

## تمارين ٢ - ٥

(١) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة لوغاريتمية مكافئة:

أ) $٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$   ب) $(\frac{٢}{٥})^{٤} = \frac{١٦}{٦٢٥}$   جـ) $٥^{صفر} = ١$   د) $(\sqrt{٢})^{٤} = ٤$

(٢) عبِّر عن كل مما يأتي بصورة أسية مكافئة:

أ) لو ١٠٠ = ٢   ب) $لو_{٢} ٤\sqrt{٢} = \frac{٥}{٢}$   جـ) $لو_{٧} ١ = صفر$   د) $لو_{\sqrt{١١}} ١٢١ = ٤$

(٣) عيِّن مجال الدالة د في كل مما يأتي:

أ) $د(س) = لو_{٢} (٢س+١)$   ب) د(س) = ٢لوس   جـ) $د(س) = لو_{(٥-س)} (س-٣)$

(٤) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

أ) $لو_{٢} ١٦$   ب) $لو_{\sqrt{٥}} ٥$   جـ) $لو_{٨} ١$   د) $لو_{٣} ٣\sqrt{٣}$

(٥) أوجد في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ) $لو_{٣} ٢٧ = س + ٢$   ب) $لو_{س} (٢س + ٣) = ٢$   جـ) لو (٢س + ١) = صفر

د) $لو_{٢} (لو_{٣} س) = ١$   هـ) $لو_{٤} [١٣ + لو_{٢} (س-١)] = ٢$   و) $لو_{٢} (٤^{س} - ٢) = س$

(٦) مثل بيانيًّا كل من الدوال الآتية:

أ) $د(س) = لو_{٣} س$   ب) $د(س) = لو_{\frac{١}{٢}} (س+١)$

| س | ٩ | ٣ | ١ | $\frac{١}{٣}$ | $\frac{١}{٩}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | | | | | |

| س | $-\frac{٧}{٨}$ | $-\frac{١}{٢}$ | صفر | ١ | ٣ | ٧ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | | | | | | |

(٧) ارسم في شكل واحد منحنى كل من الدالتين ر، د حيث $ر(س) = لو_{٢} س$، د(س) = ٦ - س، ثم استخدم ذلك في إيجاد مجموعة حل المعادلة $لو_{٢} س = ٦ - س$.

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(٨) إذا كان $لو_{٣} س = ٢$ فإن س = ..................

أ) ٩   ب) ٨   جـ) ٣   د) ٥

(٩) إذا كان $لو_{أ} ١٦ = ٤$ فإن أ ∈ ..................

أ) {١٦}   ب) {٢}   جـ) {٢، -٢}   د) {١}

(١٠) $لو_{٥} ١٢٥ =$ ..................

أ) $\sqrt{٣}$   ب) ٣   جـ) ٥   د) ١٢٥

**١١** مجال الدالة د حيث د(س) = $لو_{(١-س)}$ ٣ هو ........

أ ]-∞، ٠[ ∪ ]٠، ١[ ب ]-∞، ١[ ج ]١، ∞[ د ]-١، ١[

**١٢** لو ١٠٠ = ........

أ ١ ب ٢ ج ٣ د -١

**١٣** إذا كان منحنى الدالة د حيث د(س) = $لو_{أ}$ س يمر بالنقطة (٨، ٣): فإن د(٤) = ........

أ ١ ب ٢ ج $\frac{١}{٤}$ د -٢

**١٤** الشكل المقابل يمثل الدالة ........




أ ص = $٣^{س-١}$ ب ص = $٣^{س+١}$

ج ص = $لو_{٣}$ (٢-س) د ص = $لو_{٣}$ (٣-س)

**١٥** أوجد قيمة س فى كل مما يأتى وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

أ $لو_{٣}$ ٨١ ب $لو_{٢} \frac{١}{٨}$ ج $لو_{\sqrt{٧}}$ ٣٤٣ د لو ٠,٠٠١

**١٦** أوجد قيمة كل مما يأتى وتحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة:

أ $لو_{٨١} ٣^{س} = \frac{٣}{٤}$ ب $لو_{٣}$ (٢س - ٥) = ٠ ج $لو_{س}$ (س + ٦) = ٢

د $لو_{٥}$ $لو_{٢}$ $لو_{٣}$ س = ٠ هـ $لو_{٣} \left(\frac{س^{٢}}{٢س-٣}\right) = ١$ و $لو_{٥}$ |٢س + ١| = ١

**١٧** الربط بالتعليم: إذا كانت العلاقة بين درجات تذكر أحد الطلاب بالمعلومات التي درسها في الصف الأول الثانوي وعدد الأشهر (ن) التي تبدأ من نهاية تدريس الصف هي: د(ن) = ٧٠ - ٤ $لو_{٢}$ (ن + ١)

فأوجد درجات هذا الطالب:

**أولًا:** في نهاية تدريس الصف الأول الثانوى (ن = ٠)

**ثانيًا:** بعد مرور ٧ أشهر من تدريس الصف الأول الثانوى.

**١٨** تطبيقات: في دراسة لقياس مدى احتفاظ الطلبة لما تم دراسته في أحد المواد يعاد امتحانهم من فترة إلى أخرى في نفس المادة. فإذا كانت درجات أحد الطلبة تتبع العلاقة د(ن) = ٨٥ - ٢٥لو(ن + ١) حيث ن عدد الأشهر بعد اكتمال الدراسة، د(ن) درجة الطالب (نسبة مئوية). أوجد.

أ درجة الطالب في أول امتحان لهذه المادة.

ب درجة الطالب بعد مرور ٣ أشهر من دراسته لهذه المادة.

ج درجة الطالب بعد مرور عام كامل من دراسته لهذه المادة.

# ٢ - ٦ بعض خواص اللوغاريتمات

*Some Properties of Logarithms*

**سوف تتعلم**

- استخدام بعض خواص اللوغاريتمات.
- حل المعادلات اللوغاريتمية.
- استخدام الحاسبة في حل المعادلات الأسية.
- تطبيقات حياتية على اللوغاريتمات.

**المصطلحات الأساسية**

- معادلة لوغاريتمية. Logarithmic Equations
- مقياس ريختر. Richter Scale

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية.

## استكشف

باستخدام الحاسبة أوجد قيمة كل من:

١) (لو$_{٢}$ ٤ + لو$_{٢}$ ٨) ، لو$_{٢}$ ٣٢ ٢) (لو ٤٠ + لو $\frac{٥}{٢}$) ، لو ١٠٠

٣) (لو$_{٣}$ ٢٧ - لو$_{٣}$ ٩) ، لو$_{٣}$ ٣ ماذا تستنتج مما سبق؟

## تعلم

### بعض خواص اللوغاريتمات Some Properties of Logarithms

إذا كان ؛ فإن: أ ∈ ع$^{+}$ - {١} فإن **١)** لو$_{أ}$ أ = ١ **٢)** لو$_{أ}$ ١ = صفر

حاول إثبات كل من ١ ، ٢ من تعريف اللوغاريتم.

**٣) خاصية الضرب في اللوغاريتمات:**

لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص حيث س، ص ∈ ع$^{+}$

**لإثبات صحة هذه الخاصية:**

ضع ب = لو$_{أ}$ س ، جـ = لو$_{أ}$ ص

**ومن تعريف اللوغاريتمات فإن:**

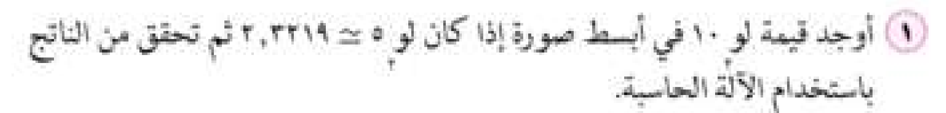
س = أ$^{ب}$ ، ص = أ$^{جـ}$

**فتكون** س ص = أ$^{ب}$ × أ$^{جـ}$ **أي أن** س ص = أ$^{ب + جـ}$

**وبتحويل هذه الصورة إلى الصورة اللوغاريتمية تكون:** لو$_{أ}$ س ص = ب + جـ

**وبالتعويض عن قيمتي ب، جـ تكون** لو$_{أ}$ س ص = لو$_{أ}$ س + لو$_{أ}$ ص

### مثال



١) أوجد قيمة لو$_{٢}$ ١٠ في أبسط صورة إذا كان لو$_{٢}$ ٥ ≃ ٢,٣٢١٩ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

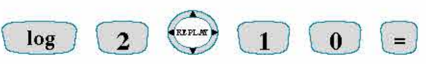
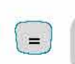
**الحل**

لو$_{٢}$ ١٠ = لو$_{٢}$ (٢ × ٥)

= لو$_{٢}$ ٢ + لو$_{٢}$ ٥ باستخدام خاصية الضرب في اللوغاريتمات

= ١ + ٢,٣٢١٩ ≃ ٣,٣٢١٩ باستخدام الخاصية (١)، بالتعويض عن لو$_{٢}$ ٥ ≃ ٢,٣٢١٩

التحقيق باستخدام الآلة الحاسبة:

3.321928095

**حاول أن تحل**

١) أوجد قيمة $لو_٣ ١٥$ في أبسط صورة إذا كان $لو_٣ ٥ \simeq ١,٤٦٥$ ثم تحقق من الناتج باستخدام الآلة الحاسبة.

### ٤) خاصية القسمة في اللوغاريتمات:

$لو_أ \frac{س}{ص} = لو_أ س - لو_أ ص$ حيث س، ص $\in$ ع$^+$ **(حاول أن تثبت صحة العلاقة)**

**مثال**

٢) أوجد قيمة المقدار: لو٣٠ - لو٣ .

**الحل**

$لو٣٠ - لو ٣ = لو \frac{٣٠}{٣} = لو ١٠ = ١$

**حاول أن تحل**

٢) أثبت باستخدام خاصية القسمة في اللوغاريتمات أن: لو٢ = ١ - لو ٥

### ٥) خاصية لوغاريتم القوة:

$لو_أ س^{ن} = ن لو_أ س$ **حيث** ن $\in$ ع ، س $>$ ٠

**مثال**

٣) أوجد فى أبسط صورة $لو_٥ \sqrt[٤]{١٢٥}$

**الحل**

$لو_٥ \sqrt[٤]{١٢٥} = لو_٥ (٥)^{\frac{٣}{٤}} = \frac{٣}{٤} لو_٥ ٥ = \frac{٣}{٤} \times ١ = \frac{٣}{٤}$

**لاحظ أن**

$(\sqrt[٤]{١٢٥} = \sqrt[٤]{٥^٣} = ٥^{\frac{٣}{٤}})$

**حاول أن تحل**

٣) ضع في أبسط صورة

$لو_٣ \sqrt[٤]{٢٤٣}$ ، $لو_٧ \sqrt[٤]{٣٤٣}$

**لاحظ أن:** $لو_أ (\frac{١}{س}) = - لو_أ س$ حيث س $\in$ ع$^+$

### ٦) خاصية تغيير الأساس:

إذا كانت س $\in$ ع$_+$ ، ص ، أ $\in$ ع$^+$ - {١} ، أثبت أن: $لو_ص س = \frac{لو_أ س}{لو_أ ص}$

البرهان (لا يمتحن فيه الطالب)

بوضع: $ع = لو_{ص} س$

$ص^{ع} = س$ بالتحويل إلى الصورة الأسية

$ع لو_{أ} ص = لو_{أ} س$ يأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

فتكون $ع = \frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص}$ أي أن: $لو_{ص} س = \frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص}$

حاول أن تحل

(٤) استخدم الخاصية السابقة في إيجاد قيمة كل من: (أ) $لو_{٤} ٨$ (ب) $لو_{٩} ٢٤٣$

**٧- خاصية المعكوس الضربي:** $لو_{أ} ب = \frac{١}{لو_{ب} أ}$

تفكير ناقد: إذا كانت أ، ب $\in$ ع$^{+}$ - {١} فأثبت أن $لو_{أ} ب = \frac{١}{لو_{ب} أ}$ ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة: $لو_{٣} ٧ \times لو_{٧} ٣$ في أبسط صورة.

## كتابة العبارات اللوغاريتمية بالصورة المختصرة:

مثال

(٤) اختصر لأبسط صورة:

(أ) $٢لو٢٥ + لو(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥}) + ٢لو٣ - لو٣٠$

(ب) $لو_{٥} ٤٩ \times لو_{٨} ٥ \times لو_{٩} ٨ \times لو_{٧} ٩$

الحل

(أ) المقدار $= لو ٢٥^{٢} + لو\frac{٨}{١٥} + لو٣^{٢} - لو٣٠$ خاصية ٥

$= لو (٢٥^{٢} \times \frac{٨}{١٥} \times ٣^{٢} \times \frac{١}{٣٠})$ خاصية ٣، ٤

$= لو١٠٠ = ٢$

(ب) المقدار $= \frac{لو٤٩}{لو٥} \times \frac{لو٥}{لو٨} \times \frac{لو٨}{لو٩} \times \frac{لو٩}{لو٧}$ خاصية ٦

$= \frac{لو ٤٩}{لو٧} = \frac{٢لو٧}{لو٧} = ٢$

حاول أن تحل

(٥) اختصر: $لو٠,٠٠٩ - لو\frac{٢٧}{١٦} + لو\frac{٥}{٨}١٥ - لو\frac{١}{١٢}$

(٦) أثبت أن: $\frac{لو٧٢٩ - لو٦٤}{لو٩ - لو٤} = ٣$

(٧) إذا كان $س^{٢} + ص^{٢} = ٨س ص$، أثبت أن: $٢لو(س + ص) = ١ + لوس + لوص$

## حل المعادلات اللوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

### مثال

⑤ أوجد في ع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٢}$ (س - ١) + لو$_{٢}$ (س + ١) = لو$_{٢}$ ٨ ب لو$_{٢}$ س + لو$_{س}$ ٢ = ٢

**الحل**

أ المعادلة معرفة لكل س ∈ {س:س - ١ > صفر} ∩ {س:س + ١ > صفر}

أي س > ١ (مجال تعريف المتغير)

لو$_{٢}$ (س - ١) + لو$_{٢}$ (س + ١) = لو$_{٢}$ ٨

∴ لو$_{٢}$ (س - ١) (س + ١) = لو$_{٢}$ ٨ **خاصية ٣**

∴ س$^{٢}$ - ١ = ٨ ∴ س$^{٢}$ = ٩ ومنها س = ±٣

وحيث إن س = -٣ لا تنتمي لمجال تعريف المتغير ∴ مجموعة الحل = {٣}

ب المعادلة معرفة لكل س > صفر ، س ≠ ١

∴ لو$_{٢}$ س + $\frac{١}{لو_{٢} س}$ = ٢ **خاصية ٧**

∴ (لو$_{٢}$ س)$^{٢}$ + ١ = ٢لو$_{٢}$ س **بالضرب في لو$_{٢}$ س**

∴ (لو$_{٢}$ س)$^{٢}$ - ٢لو$_{٢}$ س + ١ = صفر ∴ (لو$_{٢}$ س - ١)$^{٢}$ = صفر

∴ لو$_{٢}$ س = ١ ∴ س = ٣∈ مجال تعريف المتغير

∴ مجموعة الحل = {٣}

**حاول أن تحل**

⑧ أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية في ع:

أ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ٢) = ١ ب لو(٨ - س) + ٢لو$\sqrt{س - ٦}$ = ٠ ج لوس - لو$_{س}$ ١٠٠ = ١

## حل المعادلات الأسية باستخدام اللوغاريتمات Solving Exponential Equations Using Logarithms

### مثال

**استخدام الآلة الحاسبة فى حل المعادلات اللوغاريتمية**

⑥ أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

أ ٢$^{س+١}$ = ٥ ب ٥$^{س-٢}$ = ٣ × ٤$^{س+١}$

**الحل**

أ ٢$^{س+١}$ = ٥ **يأخذ اللوغاريتم للطرفين**

∴ لو٢$^{س+١}$ = لو٥ ∴ (س + ١) لو٢ = لو٥

∴ س + ١ = $\frac{لو٥}{لو٢}$ أي أن: س = $\frac{لو٥}{لو٢}$ - ١ ∴ س ≃ ١,٣٢

استخدام الآلة الحاسبة:

log 5 ) ÷ log 2 ) - 1 = 1.321928095

ب $٥^{س-٢} = ٣ \times ٤^{س+١}$ يأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو $٥^{س-٢}$ = لو $(٣ \times ٤^{س+١})$ ∴ لو $٥^{س-٢}$ = لو ٣ + لو $٤^{س+١}$

∴ (س - ٢) لو ٥ = لو ٣ + (س + ١) لو ٤ ∴ س لو ٥ - ٢لو ٥ = لو ٣ + س لو ٤ + لو ٤

∴ س لو ٥ - س لو ٤ = لو ٣ + لو ٤ + ٢لو ٥ ∴ س (لو ٥ - لو ٤) = لو ٣ + لو ٤ + ٢لو ٥

∴ س = $\frac{\text{لو ٣ + لو ٤ + ٢لو ٥}}{\text{لو ٥ - لو ٤}} \simeq ٢٥,٥٦$

استخدم الآلة الحاسبة:

log 3 ) + log 4 ) + 2 log 5 ) = ÷ ( log ( 5 ) - log 4 = 25.56104553

٩ حاول أن تحل

٩ أوجد قيمة س لأقرب رقم عشري واحد في كل مما يأتي:

أ $٣^{٧-٢س} = ١٣,٤$ ب $٧^{س-٢} = ٤^{س+٣}$

مثال

تطبيقات على قوانين اللوغاريتمات

٧ الربط بالجيولوجيا: إذا كانت درجة قوة الزلزال على مقياس ريختر تحسب بالعلاقة د = لو $(\frac{ش}{ش_٠})$، حيث ش هي شدة الزلزال، $ش_٠$ الشدة الابتدائية، وتعرف بالمقياس الصفرى لشدة الزلزال (أقل شدة لحركة الأرض بحيث لا يسجلها المقياس).

أ أوجد على مقياس ريختر درجة الزلزال الذي شدته تعادل $١٠^٦$ مرة قدره الشدة الابتدائية.

ب في عام ١٩٨٩ حدث زلزال بقوة ٧,١ على مقياس ريختر. احسب شدته.

الحل

أ ∵ د = لو $(\frac{ش}{ش_٠})$ ، ش = $١٠^٦$ $ش_٠$. ∴ د = لو $(\frac{١٠^٦ ش_٠}{ش_٠})$ = لو $١٠^٦$ = ٦ لو ١٠ = ٦

أي أن الزلزال درجته ٦ على مقياس ريختر.

ب ∵ درجة الزلزال = ٧,١

∴ ٧,١ = لو $(\frac{ش}{ش_٠})$ ∴ $\frac{ش}{ش_٠} = ١٠^{٧,١}$ فتكون ش = $١٠^{٧,١}$ $ش_٠$.

أي أن شدة الزلزال تعادل ١٢٥٩٠٠٠٠ مرة تقريبًا قدر الشدة الابتدائية.

**حاول أن تحل**

(١٠) إذا كان عدد سكان إحدى المدن ابتداء من عام ٢٠١٠ يُعطى بالعلاقة ع = ١٠$^{٥}$ (١,٣)$^{ن-٢٠١٠}$ ، حيث ع عدد السكان ، ن السنة

أ احسب عدد سكان هذه المدينة عام ٢٠١٥

ب في أي سنة يصبح عدد سكان هذه المدينة ١,٤ مليون نسمة.



## تمارين ٢ - ٦

(١) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

أ لو ١٠٠٠ ب $لو_{٢}$ ٣٢ جـ $لو_{\frac{١}{٤}}$ ١٦ د $لو_{٧}$ ٤٩

هـ لو ٠,٠٠١ و $لو_{٨}$ ٢ ز $لو_{٨}$ ١ ح $لو_{ص} \sqrt{ص}$

(٢) اختصر لأبسط صورة

أ لو٢ + لو٥ ب $لو_{٥}$ ١٥ - $لو_{٥}$ ٣ جـ $\frac{لو٢٥}{لو٥}$

د $لو_{٢}$ ٥ × $لو_{٥}$ ٢ هـ لو ٥٤ - ٣ لو٣ - لو٢ و ١ + لو٣ - لو٢ - لو١٥

ز $لو_{اب جـ}$ أ + $لو_{اب جـ}$ ب + $لو_{اب جـ}$ جـ ح $\frac{١}{لو_{٢} ١٢} + \frac{١}{لو_{٨} ١٢} + \frac{١}{لو_{٩} ١٢}$

(٣) علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ، حيث س ، ص ∈ ع$^{+}$ ، أ، ب ∈ ع$^{+}$ - {١}:

أ $لو_{أ}$ (س + ص) = $لو_{أ}$ س + $لو_{أ}$ ص ( )

ب $لو_{أ}$ (س + ص) = $لو_{أ}$ س × $لو_{أ}$ ص ( )

جـ $لو_{أ}$ (س ص) = $لو_{أ}$ س + $لو_{أ}$ ص ( )

د لو٢س$^{٥}$ = ٥لو٢س ( )

هـ $لو_{أ}$ ($\frac{س}{ص}$) = $لو_{أ}$ س + $لو_{أ}$ ص$^{-١}$ ( )

و $\frac{لو_{أ} س}{لو_{أ} ص} = \frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} ص}$ ( )

ز إذا كان س > صفر فإن $لو_{أ}$ س$^{٤}$ = ٤$لو_{أ}$ س ( )

(٤) إذا كان لو٢ = س$^{٨}$، لو٣ = ص أوجد بدلالة س ، ص كل من: لو٦ ، $لو_{١٨}$ ١٢

(٥) أوجد قيمة س فى كل مما يأتى مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

أ ٧$^{٣س-٢}$ = ٥ ب ٧$^{س+١}$ = ٣$^{س-٢}$ جـ $\frac{٥}{١٠^{س٢}}$ = ٧ د س$^{لو س}$ = ١٠٠ س

(٦) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ) $لو_٤ س = ١ - لو_٤ (س - ٣)$

ب) $لو_٣ (س + ٦) = ٢ لو_٣ س$

جـ) لو (س + ٨) - لو (س - ١) = ١

د) $(لو س)^٢ - لو س^٢ = ٣$

هـ) $(لو س)^٣ = لو س^٩$

و) $٣^{لو س} = ٢^{لو ٣}$

ز) $لو_٣ س = لو_س ٣$

ح) $لو_٢ س + لو_س ٢ = ٢$

ط) $لو_٢ (٢^{-س} - ٤) + س - ٥ = صفر$

(٧) استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كل من:

أ) لو ٣,١٥

ب) $لو_٢ ٢٥$

جـ) ٢ لو ٥ - ٣ لو ٧

د) $\frac{٣^{١٥٠} \times ٥^{٢٠٠}}{٧^{٢٥٠}}$

(٨) استخدم الحاسبة فى إيجاد عدد أرقام العدد $٤^{٤٧}$

(٩) الربط بالكيمياء: يعرف الرقم الهيدروجيني للمحلول (PH) على أنه سالب لوغاريتم تركيز الهيدروجين فى المحلول $(H^+)$ أى أن: $PH = -\log(H^+)$

أ) احسب الرقم الهيدروجينى لمحلول تركيز الهيدروجين فيه $10^{-3}$

ب) احسب تركيز الهيدروجين فى محلول رقمه الهيدروجينى 9

(١٠) الربط بالسكان: إذا كان عدد سكان احد المدن يتزايد بمعدل سنوى قدره ٧٪

أ) أوجد العلاقة التى توضح عدد السكان بعد عام.

ب) بعد كم سنة يتضاعف عدد السكان إذا استمرت الزيادة بهذا المعدل.

(١١) إذا كان $س = ٥ + ٢\sqrt{٦}$ أوجد فى أبسط صورة قيمة $لو (\frac{١}{س} + س)$

(١٢) اكتشف الخطأ: قامت كل من أميرة و إسراء بحل السؤال اختصر: $لو س^٣ + لو ص^٤ - لو س ص^٢$

**حل أميرة**

المقدار = ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س ص

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ (لو س + لو ص)

= ٣ لو س + ٤ لو ص - ٢ لو س - ٢ لو ص

= لو س + ٢ لو ص

**حل إسراء**

$المقدار = لو \frac{س^٣ \times ص^٤}{س ص^٢} = لو س^٢ ص^٢$

$= لو (س ص)^٢ = ٢ لو س ص$

= ٢ (لو س + لو ص)

أى الحلين هو الصواب؟ لماذا؟

(١٣) تفكير ابداعى: بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة:

لو (ظا ١°) + لو (ظا ٢°) + لو (ظا ٣°) + ............ + لو (ظا ٨٩°)



## تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

## ملخص الوحدة

**١) الأسس الصحيحة**

أ) $أ^ن = أ \times أ \times أ \times \times أ$ (العامل أ مكرر ن من المرات)

ب) $أ^٠ = ١$ حيث $أ \in ع - \{٠\}$ جـ) $أ^{-١} = \frac{١}{أ}$ ، $أ^{-ن} = \frac{١}{أ^ن}$ حيث $أ \neq ٠$

**٢) قوانين الأسس الصحيحة** لكل م ، ن ∈ ص ، أ ، ب ∈ ع - {٠} ، فإن:

أ) $أ^م \times أ^ن = أ^{م+ن}$ ب) $(أب)^ن = أ^ن ب^ن$ جـ) $\frac{أ^م}{أ^ن} = أ^{م-ن}$

د) $(\frac{أ}{ب})^م = \frac{أ^م}{ب^م}$ هـ) $(أ^م)^ن = أ^{من}$

**٣) الجذور النونية** المعادلة $س^ن = أ$ حيث $أ \in ع$، $ن \in ص^+$ لها ن من الجذور

أ) ن عدد زوجي ، $أ \in ع^+$ يوجد جذران حقيقيان (باقي الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)، أحدهما موجب والآخر سالب، ويسمى الجذر الموجب بالجذر الأساسي، ويرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{أ}$

ب) ن عدد زوجي ، $أ \in ع^-$ ليس للمعادلة جذور حقيقية (جميع الجذور أعداد مركبة غير حقيقية)

جـ) ن فردي ، $أ \in ع$ يوجد للمعادلة جذر حقيقي وحيد (باقي الجذور أعداد مركبةغير حقيقية)، ويسمى هذا الجذر بالجذر الأساسي

د) $ن \in ص^+$ ، أ = صفر يوجد للمعادلة حل وحيد هو الصفر (لها ن من الجذور المكررة وكل منها يساوي صفر).

**٤) خواص الجذور النونية:** إذا كان $\sqrt[ن]{أ}$ ، $\sqrt[ن]{ب} \in ع$ فإن:

أ) $\sqrt[ن]{أب} = \sqrt[ن]{أ} \times \sqrt[ن]{ب}$ ب) $\sqrt[ن]{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt[ن]{أ}}{\sqrt[ن]{ب}}$ ، ب $\neq ٠$

جـ) $\sqrt[ن]{أ^م} = (\sqrt[ن]{أ})^م = أ^{\frac{م}{ن}}$ د) $\sqrt[ن]{أ^ن} = أ$ إذا كان ن فردي = $|أ|$ إذا كان ن زوجي

**٥) الأسس الكسرية**

أ) لأي عدد حقيقي أ ≥ ٠، $ن \in ص^+ - \{١\}$ يكون $أ^{\frac{١}{ن}} = \sqrt[ن]{أ}$

هذه العلاقة صحيحة أيضًا عندما أ < ٠ ، ن عدد صحيح فردي أكبر من ١

ب) على ذلك يكون $أ^{\frac{م}{ن}} = (\sqrt[ن]{أ})^م = \sqrt[ن]{أ^م}$ حيث $أ \in ع$، م، ن عددان صحيحان ليس بينهما عامل مشترك، ن > ١، $\sqrt[ن]{أ} \in ع$

**٦) الدالة الأسية:** إذا كانت د: ع ⟵ $ع^+$ حيث $د(س) = أ^س$ لكل $أ \in ع^+ - \{١\}$ فإن د تسمى دالة أسية أساسها أ

**٧) خواص منحنى الدالة الأسية : $د(س) = أ^س$** أ) مجال الدالة = ع ب) المدى $ع^+$

جـ) الدالة متزايدة على مجالها لكل أ > ١ وتسمى بدالة النمو الأسي معامله أ.

د) الدالة متناقصة على مجالها لكل ٠ < أ< ١ وتسمى بدالة التضاؤل الأسي معامله أ.

**٨) المعادلة الأسية:** إذا كان $أ^ن = أ^م$ حيث $أ \notin \{٠، ١، -١\}$ فإن م = ن

إذا كان $أ^ن = ب^ن$ حيث أ ، ب $\notin \{٠، ١، -١\}$ فإن

**إما** ن = صفر **أو** أ = ب في حالة ن عدد فردي **أو** |أ| = |ب| في حالة ن عدد زوجي

٩) **الدالة العكسية** إذا كانت د دالة أحادية من مجموعة س إلى مجموعة ص، فإن الدالة $د^{-١}$ من ص إلى س تسمى دالة عكسية للدالة د إذا كان لكل (س ، ص) ∈ د فإن (ص ، س) ∈ $د^{-١}$

١٠) **منحنى الدالة** $د^{-١}$ هو صورة منحنى د بالانعكاس فى المستقيم ص = س .

١١) لكي يكون للدالة د دالة عكسية على فترة معينة يجب أن تكون د دالة أحادية على نفس الفترة أي يحقق منحنى د اختبار الخط الأفقى (إذا قطع أى مستقيم أفقى المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر فإن المنحنى يمثل دالة أحادية).

- يقال إن د(س) ، ر(س) دالة عكسية للأخرى إذا كان (د ∘ ر) (س) = س ، (ر ∘ د) (س) = س
- مجال الدالة د(س) هو مدى الدالة العكسية $د^{-١}$(س)
- ومدى الدالة د(س) هو مجال الدالة العكسية $د^{-١}$(س)

١٢) **الدالة اللوغاريتمية**

أ) إذا كانت أ ∈ $ع^{+}$ - {١} فإن الدالة ص = $لو_{أ}$ س هى الدالة العكسية للدالة الأسية ص = $أ^{س}$

ب) $أ^{ب}$ = جـ فإن ب = $لو_{أ}$ جـ (التحويل من الصورة الأسية إلى الصورة اللوغاريتمية والعكس).

جـ) اللوغاريتم المعتاد: هو لوغاريتم اساسه ١٠ {لاحظ أن لو ٥ = $لو_{١٠}$ ٥ }

١٣) **خواص الدالة اللوغاريتمية** أ) مجال الدالة = $ع^{+}$ ب) المدى = ع

جـ) الدالة ص= $لو_{أ}$ س متزايدة لكل أ > ١ ومتناقصة لكل ٠ < أ < ١

١٤) خواص اللوغاريتمات: إذا كانت أ ∈ $ع^{+}$ - {١}

أ) $لو_{أ}$ أ = ١ ب) $لو_{أ}$ ١ = صفر جـ) $لو_{أ}$ $س^{م}$ = م $لو_{أ}$ س حيث س > صفر

د) $لو_{أ}$ س + $لو_{أ}$ ص = $لو_{أ}$ س ص حيث س، ص > صفر

هـ) $لو_{أ}$ س - $لو_{أ}$ ص = $لو_{أ}$ $\frac{س}{ص}$ حيث س، ص > صفر

و) $لو_{أ}$ س = $\frac{لو_{ب} س}{لو_{ب} أ}$ حيث س > صفر ، أ، ب ∈ $ع^{+}$ - {١} ز) $لو_{أ}$ س × $لو_{س}$ أ = ١

**@ معلومات إثرائية**

قم بزيارة المواقع الآتية:





## اختبار تراكمى

**(١)** أوجد قيمة كل من:

أ) $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$  ب) $\sqrt[٤]{١٦^{-٣}}$  جـ) $لو_{٠,٠٩}(٠,٣)^{-٢}$

**(٢)** اختصر لأبسط صورة:

أ) $\frac{٥^{٢س} \times ٤^{س}}{١٠^{٢س-١}}$  ب) $\frac{٥ \times ٣^{٢ن} - ٤ \times ٣^{٢ن-١}}{٢ \times ٣^{٢ن+١} - ٣^{٢ن}}$  جـ) $لو_{٦} ٤ + ٢ لو_{٦} ٣$

**(٣)** أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ) $٢^{س} = ١٠$ مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى.  ب) $لو_{٥} س + لو_{٥} ٣ = ٢$

جـ) $٢^{س} - ٢^{س+١} + ٢^{س-١} = -١$  د) $س^{\frac{١٠}{٣}} - ٣٣ س^{\frac{٥}{٣}} + ٣٢ =$ صفر

**(٤)** اختر الإجابة الصحيحة:

أ) العدد $٢^{٢٤} + ٢^{٢٣} + ٢^{٢٢}$ يقبل القسمة على ..................

(أ) ٣  (ب) ٥  (جـ) ٧  (د) ٩

ب) إذا كان لو(س + ١١) = ٢ فإن س = ..................

(أ) -٩  (ب) ٢٢  (جـ) ٨٩  (د) ٩١

جـ) مجموع جذور المعادلة $س^{٤} = ١٦$ يساوى ..................

(أ) ٢  (ب) -٢  (جـ) ±٢  (د) صفر

د) لو (حتا $\theta$) + لو (قا$\theta$) = .................. حيث $\theta \in ]٠ ، \frac{\pi}{٢}[$

(أ) أ  (ب) صفر  (جـ) ٢  (د) -١

**(٥)** إذا كان لو(س + ص) = $\frac{١}{٢}$ ( لو س + لو ص) + لو ٢ أثبت أن س = ص.

**(٦)** **الربط بالفيزياء:** يعطى الزمن الدورى للبندول بالعلاقة $ن = ٢\pi\sqrt{\frac{ل}{ء}}$، حيث ن الزمن بالثوانى، ل طول البندول بالسم، ء عجلة السقوط الحر وتساوى ٩,٨ م/ث$^{٢}$

أ) أوجد الزمن لبندول كبير طوله ٧٣سم.

ب) يراد تصنيع بندول لا يستغرق أكثر من ١٠ ثانية لاتمام دورته. كم يجب أن يكون طول البندول؟

**(٧)** **الربط بالجيولوجيا:** تقاس قوة الهزة الأرضية بمقياس رختر، وتعطى قوة الهزة م بالعلاقة: م = لوس، حيث س سعة الموجة التى تسبب حركة الأرض. كم مرة تعادل سعة موجة هزة أرضية سجلت ١٠ درجات على مقياس رختر من سعة هزة أرضية أخرى سجلت ٧ درجات على نفس المقياس.



# الوحدة الثالثة

# النهايات والاتصال

# *Limits and Continuity*

## مقدمة الوحدة

## مخرجات تعلم الوحدة

## المصطلحات الأساسية

## دروس الوحدة

الدرس (٣ - ١):

الدرس (٣ - ٢):

الدرس (٣ - ٣):

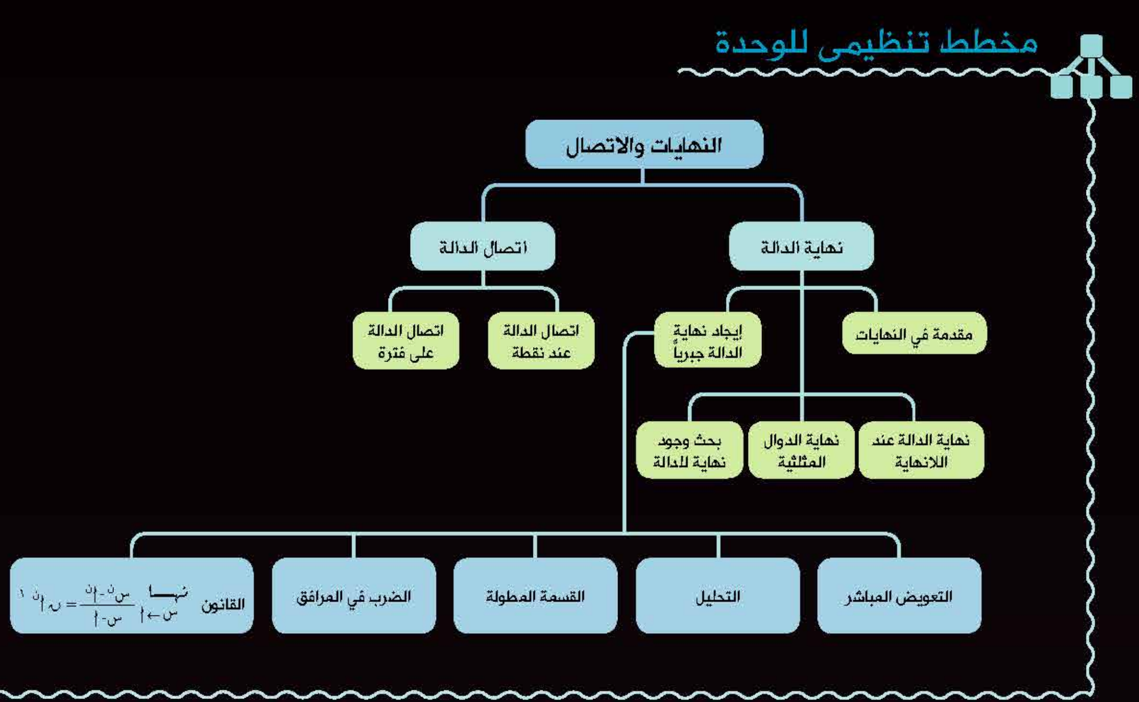
الدرس (٣ - ٤):

الدرس (٣ - ٥):

الدرس (٣ - ٦):

## الأدوات والوسائل

## مخطط تنظيمي للوحدة



# ٣ - ١ مقدمة في النهايات

## Introduction to Limits of Functions

### سوف تتعلم

- الكميات غير المعينة.
- نهاية دالة عند نقطة.

### المصطلحات الأساسية

- كمية غير معينة Unspecified Quantities
- غير معرف Undefine
- مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة Extended Real Numbers
- نهاية يمنى Right Limit
- نهاية يسرى Left Limit
- قيمة دالة Value of a Function
- نهاية دالة Limit of a Function

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

يعتبر مفهوم نهاية دالة عند نقطة من المفاهيم الأساسية في علم التفاضل. وفي هذه الوحدة سوف نتعرف على مفهوم نهاية الدالة من الناحية البيانية والجبرية. ولكن قبل ذلك دعنا نتعرف على أنواع الكميات في مجموعة الأعداد الحقيقية.

**تذكر أن**

∞ هى رمز يدل على كمية غير محدودة أكبر من أى عدد حقيقى يمكن تصوره أو تخيله.

### فكر و ناقش

أوجد ناتج العمليات الآتية إن أمكنك ذلك:

(١) ٣ × ٥    (٢) ٢٨ ÷ ٤    (٣) ٤ - ٩

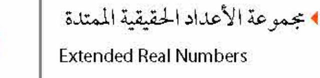
(٤) ٧ ÷ ٠    (٥) ٠ ÷ ٠    (٦) ∞ + ٣

(٧) ∞ ÷ ∞    (٨) ∞ - ∞

**أضف إلى معلوماتك**

مجموعة الأعداد الحقيقية يرمز لها بالرمز ح̄ حيث ح̄ = {-∞} ∪ ح ∪ {∞}

## الكميات غير المعينة: Unspecified Quantities



### تعلم

فى بند (فكر وناقش) نجد أن بعض نواتج العمليات محدد تمامًا مثل رقم ١ ، ٢ ، ٣ بينما بعض النواتج لايمكن تحديدها مثل باقى العمليات.

**لاحظ أن:** ٧ ÷ ٠ غير معرفة حيث أن القسمة على صفر لامعنى لها.

والآن لا يمكن تحديد ناتج العملية ٠ ÷ ٠

حيث يوجد عدد لا نهائى من الأعداد إذا ضرب كل منها فى صفر كان الناتج صفرًا، لذلك فإن $\frac{٠}{٠}$ كمية غير معينة، ومن الكميات غير المعينة أيضًا:

$\frac{\infty}{\infty}$ ، ∞ - ∞ ، ٠ × ∞ (لماذا؟)

**أضف إلى معلوماتك**

تجرى العمليات الحسابية على مجموعة الأعداد الحقيقية والرمزين ∞ ، -∞ كالآتى:

لكل أ ∈ ع فإن:

١- ∞ + أ = ∞

٢- -∞ + أ = -∞

٣- ∞ × أ = { ∞ ، إذا كان أ > ٠ ؛ -∞ ، إذا كان أ < ٠ }

٤- -∞ × أ = { ∞ ، إذا كان أ < ٠ ؛ -∞ ، إذا كان أ > ٠ }

## مثال

① أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا:

أ ٤ + ∞ ب ٣ - ∞ ج ٠ ÷ ٣ د - ٥ ÷ ٠

هـ ∞ + ∞ و ٠ ÷ ٠ ز ٥ × ∞ ح - ٦ × - ∞

### الحل

أ ∞ ب - ∞ ج ٠ د غير معرفة

هـ ∞ و كمية غير معينة ز ∞ ح ∞

### حاول أن تحل

① أوجد ناتج العمليات الآتية فى مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة إذا كان ذلك ممكنًا

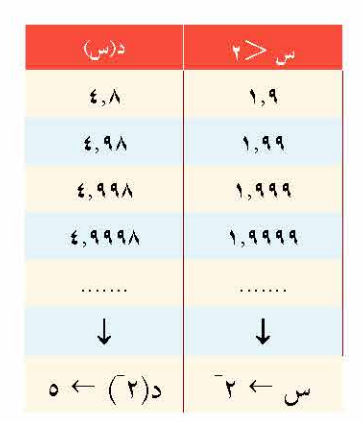
أ ٠ ÷ (- ٢) ب ٧ ÷ ٠ ج ٩ ÷ ∞ د ∞ × ٠

هـ (- ٧) × ∞ و (- ∞) + ١٢ ز ∞ + ∞ ح ∞ ÷ ∞

## نهاية دالة عند نقطة:

ادرس قيم الدالة د حيث د (س) = ٢س + ١ عندما تقترب س من ٢ من خلال بيانات الجدول الآتى:

| س > ٢ | د(س) |
|---|---|
| ٢,١ | ٥,٢ |
| ٢,٠١ | ٥,٠٢ |
| ٢,٠٠١ | ٥,٠٠٢ |
| ٢,٠٠٠١ | ٥,٠٠٠٢ |
| ....... | ....... |
| ↓ | ↓ |
| س ← ٢⁺ | د(٢⁺) ← ٥ |



| س < ٢ | د(س) |
|---|---|
| ١,٩ | ٤,٨ |
| ١,٩٩ | ٤,٩٨ |
| ١,٩٩٩ | ٤,٩٩٨ |
| ١,٩٩٩٩ | ٤,٩٩٩٨ |
| ....... | ....... |
| ↓ | ↓ |
| س ← ٢⁻ | د(٢⁻) ← ٥ |

### نلاحظ من النشاط السابق أن:

عندما تقترب س من اليمين ومن اليسار من العدد (٢) فإن د(س) تقترب من العدد (٥)

أي أن د(٢⁺) = د(٢⁻) = ٥ ونعبر عن ذلك رياضيًّا كالآتى: نهـا (س ← ٢) (٢ س + ١) = ٥ والتمثيل البيانى للدالة يوضح ذلك:

**تعريف ١**

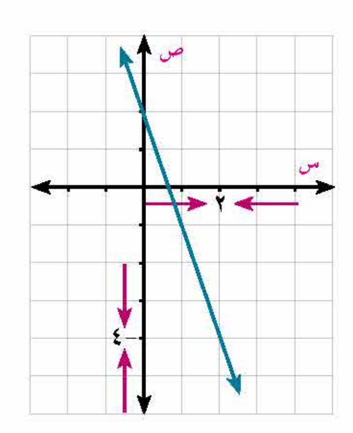
إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة ل ، عندما تقترب س من أ من جهتى اليمين واليسار، فإن نهاية د(س) تساوى ل وتكتب رمزيًا: نهـا (س ← أ) د(س) = ل

وتقرأ: نهاية د(س) عندما تقترب س من أ تساوى ل

## مثال

### تقدير النهاية (النهاية تساوى قيمة الدالة )

**٢** قدر $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٢ - ٣ س) بيانيًّا وعدديًّا




**الحل**

**بيانيًا:** تمثل الدالة الخطية: ص = ٢ - ٣س بيانيًّا كما بالشكل المقابل:

**ومن الرسم نلاحظ أن:**

عندما س ← ٢ فإن د(س) ← -٤

**أى أن:** $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٢ - ٣ س) = -٤

**عدديًا:** نكون جدولاً لقيم د(س) وذلك باختيار قيم س تكون قريبة من العدد ٢ من جهة اليمين وجهة اليسار كالآتى:

| س | ٢,١ | ٢,٠١ | ٢,٠٠١ | ← | ٢ | → | ١,٩٩٩ | ١,٩٩ | ١,٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | -٤,٣ | -٤,٠٣ | -٤,٠٠٣ | ← | -٤ | → | -٣,٩٩٧ | -٣,٩٧ | -٣,٧ |

◄ يبين الجدول أنه كلما س اقترب من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد -٤

### حاول أن تحل

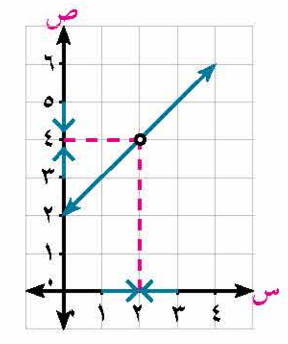
**٢** قدر نهاية كل ممايأتى بيانيًّا وعدديًّا.

أ) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (١ - ٣س)     ب) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (س$^{٢}$ -٢)

## مثال

### تقدير النهاية (النهاية لاتساوى قيمة الدالة)

**٣** قدر $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ بيانيًّا وعدديًّا.



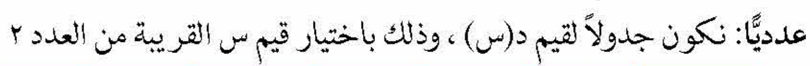

**الحل**

**بيانيًا:** يبين الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة د حيث: د(س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$

حيث س ≠ ٢.

**ونلاحظ من الشكل أنه** عندما س ← ٢ فإن قيمة د(س) ← ٤

لذلك فإن: $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = ٤$



**عدديًا:** نكون جدولاً لقيم د(س) ، وذلك باختيار قيم س القريبة من العدد ٢

| س | ٢,١ | ٢,٠١ | ٢,٠٠١ | ← | ٢ | → | ١,٩٩٩ | ١,٩٩ | ١,٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | ٤،١ | ٤,٠١ | ٤,٠٠١ | ← | ٤ | → | ٣,٩٩٩ | ٣,٩٩ | ٣,٩ |

◄ يبين الجدول أنه كلما اقتربت س من العدد ٢ من اليمين أو اليسار فإن قيم د(س) تقترب من العدد ٤.

**لاحظ من هذا المثال أن:**

١) الفجوة في الشكل البياني تعني حالة من حالات عدم التعيين $\frac{٠}{٠}$ عندما س = ٢

٢) وجود نهاية للدالة عندما س ← ٢ لاتعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = ٢ حيث إن س ∈ ع - {٢}
وهذه الملاحظة توضح مفهومًا مهما فى النهايات.

**حاول أن تحل**

(٣) قدر نهاية كل مماياتى بيانيًا وعدديًا:

أ) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ١}{س + ١}$

ب) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٢س - ٣}{س - ٣}$



**استخدام التكنولوجيا في إيجاد نهاية دالة عند نقطة (الحاسبة البيانية)**

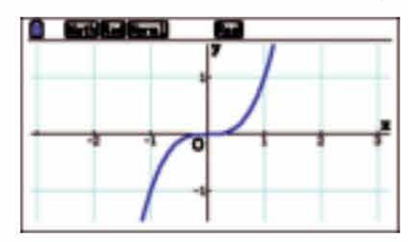
استخدم الحاسبة البيانية في رسم منحنى الدالة د، **ثم قدر نهاية الدالة عند النقطة المبينة:**

١) د(س) = $س^{٣}$ عند س ← صفر

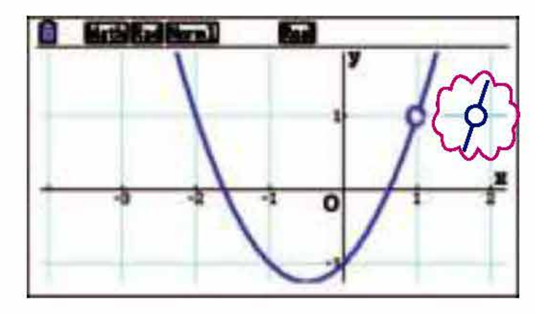
٢) د(س) = $\left(\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}\right)$ - ٢ عند س ← ١

٣) د(س) = $\frac{\text{جا } س}{س}$ عند س ← صفر

**يمكن استخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية مثل(*Geogebra*)**
**في الحاسب الآلى أو فى التابلت لرسم منحنى الدالة كالآتى:**



١) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالةد حيث: د(س) = $س^{٣}$
من الرسم $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د(س) = صفر



٢) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث

د(س) = $\left(\frac{س^{٣} - ١}{س - ١}\right)$ - ٢

من الرسم $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ١

(لاحظ الفجوة عند النقطة (١ ، ١)

٣) باستخدام الحاسبة البيانية نمثل منحنى الدالة د حيث:

د(س) = $\frac{\text{جا } س}{س}$

من الرسم نجد أن $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } س}{س}$ = ١



نستنتج من النشاط السابق أن:

إن وجود نهاية الدالة عندما س ← أ لا يعنى بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ

**تفكير ناقد:** إذا كانت الدالة د معرفة عند س = أ فهل هذا يعنى وجود النهاية عند أ فسر إجابتك.

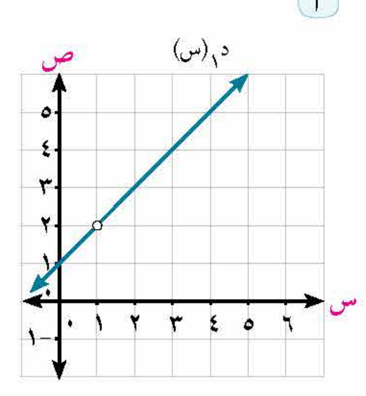
**تدريب على النشاط:** باستخدام الحاسبة البيانية أو بأحد البرامج الرسومية للحاسوب أو التابلت قدر كلًّا مما يأتى:

أ $\lim\limits_{س \to ٠} (٢ - س^٢)$  ب $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٨}{س + ٢}$  ج $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{جا٣س}{س}$




١ قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند س ⟵ ١

أ

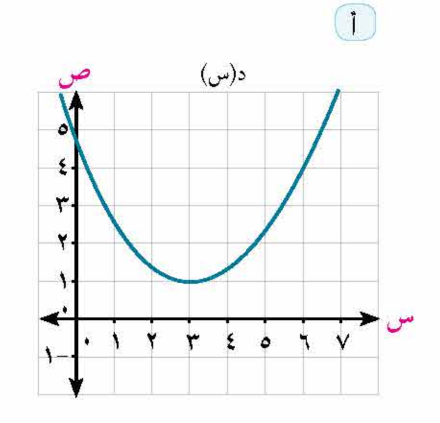



ب $د_٢(س)$

ج $د_٣(س)$

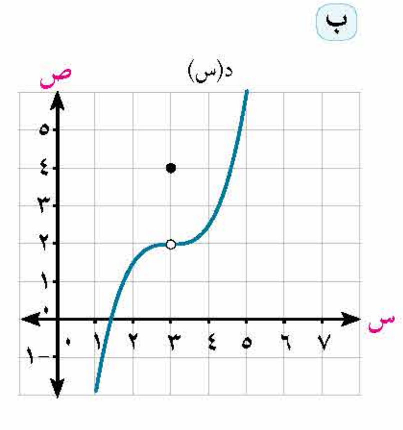
٢ قدر نهاية كل من الدوال الآتية عند النقطة المبينة:

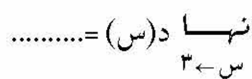
أ



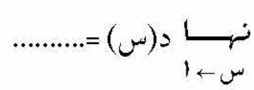

$\lim\limits_{س \to ٣}$ د(س) =..........

ب



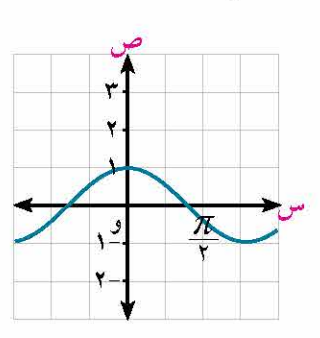

ج د(س)




٣ من الرسم البيانى أوجد:

أ $\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س)

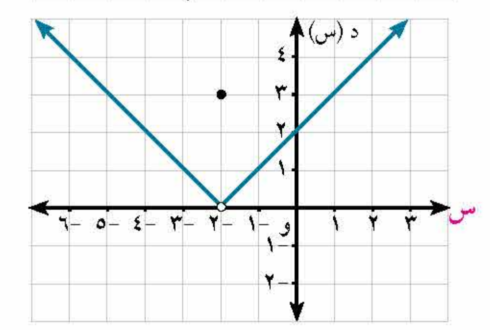
ب د(٠)



④ من الرسم البيانى المقابل أوجد

أ $\underset{\text{س} \to ٣}{\text{نهـا}}$ د(س)

ب د(٣)




⑤ من الرسم البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}}$ د(س)

ب د(- ٢)

جـ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

د د(٠)

⑥ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ (٢ - س$^{٢}$)

ب د(٠)

د(س) = ٢ − س$^{٢}$

⑦ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ٢}$

ب د(- ٢)

د(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} + ٢}$

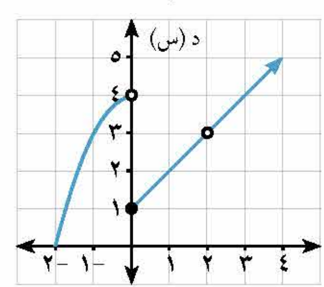
⑧ من الشكل البيانى المقابل أوجد:

أ د (٠)

ب $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}}$ د(س)

جـ د (٢)

د $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نهـا}}$ د(س)



٩ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ د(س) حيث د(س) = ٥ س + ٤

| س | ١,٩ | ١,٩٩ | ١,٩٩٩ | ⟵ | ٢ | ⟶ | ٢,٠٠١ | ٢,٠١ | ٢,١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | | | | | ؟ | | | | |

١٠ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ (٣ س + ١)

| س | -٠,٩ | -٠,٩٩ | -٠,٩٩٩ | ⟵ | -١ | ⟶ | -١,٠٠١ | -١,٠١ | -١,١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | | | | | ؟ | | | | |

١١ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١}$

| س | -٠,٩ | -٠,٩٩ | -٠,٩٩٩ | ⟵ | -١ | ⟶ | -١,٠٠١ | -١,٠١ | -١,١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | | | | | ؟ | | | | |

١٢ أكمل الجدول الآتي واستنتج $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$

| س | ١,٩ | ١,٩٩ | ١,٩٩٩ | ⟵ | ٢ | ⟶ | ٢,٠٠١ | ٢,٠١ | ٢,١ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | | | | | ؟ | | | | |

١٣ باستخدام الحاسبة البيانية أو أحد البرامج الرسومية قدر نهاية كل ممايأتي ثم حقق إجابتك باستخدام القيم الإرشادية.

أ $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ (٣س - ٤)

ب $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (س$^{٢}$ - ٤)

جـ $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} + ١}{\text{س} + ١}$

د $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} - ٢}$

هـ $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (س + جا س)

و $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س} - \text{س}}{\text{س}}$

ز $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}^{٢}}$

ح $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{|\text{س}|}$

# ٣ - ٢ إيجاد نهاية الدالة جبريًا

*Finding the Limit of a Function Algebraically*

تعلمت كيفية تعيين نهاية دالة عند س = أ بيانيًا أو عدديًا عن طريق دراسة قيم الدالة بالقرب من س = أ وفيما يلي بعض النظريات والنتائج التي تساعد في إيجاد نهاية دالة دون اللجوء إلى الرسم البياني أو دراسة قيم الدالة.

## نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب الرسومية فى رسم الشكل البيانى لكل من الدالتين:

$$د_١(س) = \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢} ، د_٢(س) = س + ١$$

**ماذا تلاحظ؟**

أوجد: $\lim_{س \to ٢} د_١(س)$ ، $\lim_{س \to ٢} د_٢(س)$

**ماذا تستنتج؟**



## تعلم

### نهاية الدالة كثيرة الحدود *Limit of a Polynomial Function*

**نظرية ١**

إذا كانت د(س) كثيرة حدود، أ ∈ ع

فإن: $\lim_{س \to أ} د(س) = د(أ)$

### مثال

**التعويض المباشر**

١ أوجد نهاية كل من الدوال الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٢} (س^٢ - ٣س + ٥)$

ب) $\lim_{س \to ٣} (-٤)$

**الحل**

أ) $\lim_{س \to ٢} (س^٢ - ٣س + ٥)$

$= ٤ - ٦ + ٥ = ٣$ (بالتعويض المباشر)

ب) $\lim_{س \to ٣} (-٤) = -٤$

لاحظ أن د(س) = -٤ ثابتة لكل قيم س ∈ ع

**تذكر أن**

تسمى الدالة د كثيرة حدود إذا كانت على الصورة
$د(س) = أ_٠ + أ_١ س + أ_٢ س^٢ + ..... + أ_ن س^ن$
حيث: ن ∈ ط ، $أ_ن \neq$ صفر، $أ_٠ ، أ_١ ، ... ، أ_ن \in$ ع

**سوف تتعلم**

- نهاية الدالة كثيرة الحدود.
- بعض نظريات النهايات.
- استخدام القسمة المطولة فى إيجاد قيمة نهاية دالة.
- استخدام النظرية $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن - ١}$

**المصطلحات الأساسية**

- نهاية دالة Limit of a Function
- دالة كثيرة الحدود Polynomial Function
- تعويض مباشر Direct Substitution
- تحليل Factorization
- قسمة تركيبية Synthetic Division
- المرافق Conjugate

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية.
- برامج رسومية للحاسوب.

**حاول أن تحل**

(١) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

(أ) $\lim_{س \to ٣} (٢س - ٥)$ (ب) $\lim_{س \to -٢} (٣س^٢ + س - ٤)$ (جـ) $\lim_{س \to -٢} (٧)$

**نظرية ٢**

إذا كان $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$ ، $\lim_{س \to أ} ق(س) = م$

فإن:

(١) $\lim_{س \to أ} ك\, د(س) = ك.ل$ حيث $ك \in ع$

(٢) $\lim_{س \to أ} [د(س) \pm ق(س)] = ل \pm م$

(٣) $\lim_{س \to أ} د(س).ق(س) = ل.م$

(٤) $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{ق(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط $م \neq ٠$

(٥) $\lim_{س \to أ} (د(س))^ن = ل^ن$ حيث $ل^ن \in ع$

**مثال**

### استخدام النظرية

(٢) أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

(أ) $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^٢ + ٢س - ٥}$ (ب) $\lim_{س \to -٢} (\sqrt{٤س^٢ - ٣})$

**الحل**

(أ) $\lim_{س \to -١} \frac{٣س + ٧}{س^٢ + ٢س - ٥} = \frac{\lim_{س \to -١} (٣س + ٧)}{\lim_{س \to -١} (س^٢ + ٢س - ٥)} = \frac{٣ \times -١ + ٧}{(-١)^٢ + ٢(-١) - ٥} = \frac{٤}{-٦} = \frac{-٢}{٣}$

(ب) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٤س^٢ - ٣} = \sqrt{\lim_{س \to -٢} (٤س^٢ - ٣)} = \sqrt{٤(-٢)^٢ - ٣} = \sqrt{١٦ - ٣} = \sqrt{١٣}$

**حاول أن تحل**

(٢) احسب النهايات الآتية:

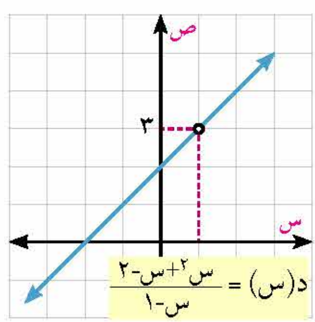
(أ) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٣}{٢س + ١}$ (ب) $\lim_{س \to -٢} \sqrt{٢س^٢ + ١}$

## إيجاد نهاية الدالة عند حالات عدم التعيين

لا يمكن إيجاد $\lim_{س \to ١} د(س)$ حيث $د(س) = \frac{س^٢ + س - ٢}{س - ١}$ باستخدام التعويض المباشر

حيث نصل إلى إحدى حالات عدم التعين $\frac{صفر}{صفر}$ ، ويبين الشكل المقابل

التمثيل البياني للدالة د حيث نجد أن $\lim_{س \to ١} د(س) = ٣$




وبعد تبسيط الدالة د واختصار العوامل المتشابهة غير الصفرية نصل للدالة

$ق(س) = س + ٢$ حيث $ق(س) = د(س)$ لجميع قيم $س \in ع - \{١\}$.

**نظرية ٣**

إذا كانت د(س) = ق(س) لكل س ∈ ح - {أ}

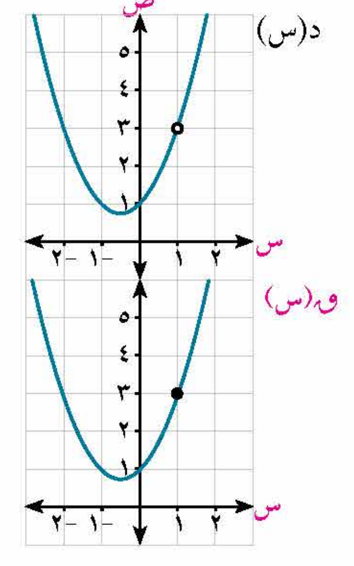
وكانت $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل فإن $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل

## مثال

### استخدام التحليل

(٣) استخدم التحليل لإيجاد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ ب) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س^٢ + ١}{س^٢ + س - ٢}$




**الحل**

أ) نلاحظ أن د(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س - ١}$ غير معينة عند س = ١

بالتحليل والقسمة على العوامل المتشابهة غير الصفرية فإنه يمكن كتابة د(س) على الصورة.

$$د(س) = \frac{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}{(س - ١)} = س^٢ + س + ١ = ق(س)$$

من ذلك نجد إن د(س) = ق(س) لكل س ≠ ١

وحيث أن $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٣

فإنه طبقًا للنظرية ٣ نستنتج أن $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٣

$\therefore \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ١}{س - ١} = ٣$

### طريقة القسمة المطولة

ب) نجد أن دالة البسط د(س) = ٠ وذلك بالتعويض عن س = ١، كذلك دالة المقام ق(س) = ٠ بالتعويض أيضًا عن س = ١ وهذا يعني أن العامل (س - ١) مشترك في كل من البسط والمقام، ونظرًا لصعوبة تحليل دالة البسط إلى عوامل أحدها (س - ١) نستخدم القسمة المطولة لنوجد العامل الآخر للمقدار $س^٣ - ٢س^٢ + ١$ كالآتي:

| | |
|---|---|
| $س^٣ - ٢س^٢ \quad + ١$ | $س - ١$ |
| $س^٣ - س^٢$ | $س^٢ - س - ١$ |
| $٠ \quad - س^٢ \quad + ١$ | |
| $- س^٢ + س$ | |
| $٠ \quad - س + ١$ | |
| $- س + ١$ | |
| صفر | |

**ارشاد للحل**

في عملية القسمة المطولة
(١) نرتب حدود كل من المقسوم والمقسوم عليه ترتيبًا تصاعديًا أو تنازليًا بنفس الطريقة.
(٢) نقسم الحد الأول من المقسوم على الحد الأول من المقسوم عليه ونكتب ناتج القسمة.
(٣) نضرب ناتج القسمة في المقسوم عليه ويطرح الناتج من المقسوم للحصول على الباقي.
(٤) نستمر بنفس الطريقة حتى الانتهاء من عملية القسمة.

**يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء عملية القسمة**

**تسمى طريقة القسمة التركيبية**

نستخدم فى هذه الطريقة معاملات كثيرات الحدود كما يلى:

**خطوة ١:** نكتب معاملات المقسوم مرتبه تنازليًّا وتساوى المقسوم عليه بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل:

المعاملات + ١ -٢ ٠ ١ | ١ قيمة س

**خطوة ٢:** اترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول في قيمة س واكتب الناتج أسفل المعامل الثانى ثم اجمع.

| ١ | -٢ | ٠ | ١ | ١ |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | ١ (١×١) | | | |
| ١ | -١ | | | |

**خطوة ٣:** كرر عمليتى الضرب والجمع.

| ١ | -٢ | ٠ | ١ | ١ |
|---|---|---|---|---|
| ↓ | ١ (١×١) | -١ | -١ (١×-١) | |
| ١ | -١ | -١ | ٠ | |

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، -١ ، -١ على الترتيب لذلك، فإن خارج القسمة هو $س^٢ - س - ١$

**أى أن:** $س^٣ - ٢س^٢ + ١ = (س - ١)(س^٢ - س - ١)$

**لذلك فإن:** $\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س^٢ - س - ١)}{(س - ١)(س + ٢)} = \lim_{س \to ١} \frac{س^٢ - س - ١}{س + ٢} = -\frac{١}{٣}$

**حاول أن تحل**

(٣) أوجد:

أ) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^٣ + ٨}{س + ٢}$

ب) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢س - ٨}{س^٢ - س - ١٢}$

جـ) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

د) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٣ - ١٠س - ٣}{س^٢ + ٢س - ٣}$

## مثال — استخدام المرافق Conjugate

(٤) أوجد النهايات الآتية:

أ) $\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$

ب) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣}$

**الحل**

أ) **لاحظ أن:** $د(س) = \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤}$ غير معينة عند س = ٤

لذلك نبحث عن طرق نتخلص بها من العامل (س - ٤)، من كل من البسط و المقام.

$$\lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{س - ٣} - ١}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س - ٣} + ١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \lim_{س \to ٤} \frac{س - ٣ - ١}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)}{(س - ٤)(\sqrt{س - ٣} + ١)}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{١}{\sqrt{س - ٣} + ١} = \frac{١}{٢}$$

ب $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} = \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt{س + ٤} - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٣}{\sqrt{س + ٤} + ٣}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س(س - ٥)\,(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{س + ٤ - ٩} = \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{س(س - ٥)(\sqrt{س + ٤} + ٣)}{(س - ٥)}$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} س(\sqrt{س + ٤} + ٣) = ٥\,(٣ + ٣) = ٣٠$

**حاول أن تحل**

٤ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

ب $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{\sqrt{س + ٥} - ٢}$



إذا كانت الدالة د على الصورة د (س) = $\frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ}$ فإن $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س - أ} = ن\,أ^{ن - ١}$

## نشاط

استعن بمعلمك للبحث فى الشبكة العنكبوتية (الإنترنت) عن طرق برهان النظرية (٤).



### إيجاد نهاية دالة عند نقطة باستخدام نظرية (٤)

٥ أوجد $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٨١}{س - ٣}$

**الحل**

$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٤} - ٣^{٤}}{س - ٣} = ٤(٣)^{٣} = ١٠٨$

**نتائج على النظرية:**

١- $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + أ)^{ن} - أ^{ن}}{س} = ن\,أ^{ن - ١}$

٢- $\underset{س \to أ}{\text{نهـا}} \frac{س^{ن} - أ^{ن}}{س^{م} - أ^{م}} = \frac{ن}{م}\,أ^{ن - م}$



٦ أوجد:

أ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{س}$

ب $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} - ٣٢}{س^{٢} - ٤}$

ج $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)^{٥} + ٣٢}{س - ٢}$

د $\underset{س \to ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[٤]{س^{٥}} - ٣٢}{\sqrt{س^{٣}} - ٦٤}$

**الحل**

أ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ٥)^٤ - ٥^٤}{س} = ٤ \times ٥^٣ = ٥٠٠$

ب $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٥ - ٢^٥}{س^٢ - ٢^٢} = \frac{٥}{٢} \times ٢^٣ = ٢٠$

ج $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ + ٣٢}{س - ٢} = \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٤)^٥ - (-٢)^٥}{(س - ٤) - (-٢)}$

$= ٥ (-٢)^٤ = ٨٠$

د $\lim\limits_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^٥} - ٣٢}{\sqrt{س^٣} - ٦٤} = \lim\limits_{س \to ١٦} \frac{س^{\frac{٥}{٤}} - (١٦)^{\frac{٥}{٤}}}{س^{\frac{٣}{٢}} - (١٦)^{\frac{٣}{٢}}}$

$= \frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٣}{٢}} \times (١٦^{\frac{٥}{٤} - \frac{٣}{٢}}) = \frac{٥}{٦} \times ١٦^{-\frac{١}{٤}} = \frac{٥}{١٢}$

**لاحظ أن**

$١٦^{\frac{٥}{٤}} = (٢^٤)^{\frac{٥}{٤}} = ٢^{٤ \times \frac{٥}{٤}}$

$= ٢^٥ = ٣٢$

كذلك فإن:

$١٦^{\frac{٣}{٢}} = ٦٤$

**حاول أن تحل**

٥ أوجد:

أ $\lim\limits_{س \to -٥} \frac{س^٤ - ٦٢٥}{س + ٥}$

ب $\lim\limits_{س \to ١٦} \frac{\sqrt[٤]{س^٧} - ١٢٨}{س - ١٦}$

ج $\lim\limits_{س \to ٧} \frac{\sqrt[٥]{س + ٢٥} - ٢}{س - ٧}$

**تفكير إبداعي:**

إذا كان $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^ن - ٦٤}{س - ٢} = ل$ فما قيمة: ن ، ل

## تمارين ٣ - ٢

**أكمل ما يأتي:**

١) $\lim\limits_{س \to ٢} (٣س - ١) =$ ..........

٢) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ٣}{س + ١} =$ ..........

٣) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^٢ - س}{س} =$ ..........

٤) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} =$ ..........

٥) $\lim\limits_{س \to أ} \frac{س^٥ - أ^٥}{س - أ} =$ ..........

٦) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س} - \sqrt[٣]{٢}}{س - ٢} =$ ..........

٧) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{\frac{١}{س^٣} - ١}{س^٤ - ١} =$ ..........

٨) $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{-١} - ٢^{-١}}{س^{-٣} - ٢^{-٣}} =$ ..........

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

٩) $\lim\limits_{س \to -١} \frac{س^٣ - ١}{س + ١}$ تساوى

أ $-٣$ ب $-٢$ ج $٣$ د ليس للدالة نهاية

(١٠) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ تساوى

(أ) ١   (ب) $\frac{\pi}{٢}$   (ج) $\frac{٢}{\pi}$   (د) ليس للدالة نهاية

(١١) $\underset{\text{س}\to ١٦}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١٦}$ تساوى:

(أ) صفر   (ب) $\frac{١}{٢}$   (ج) ١   (د) ليس للدالة نهاية

(١٢) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{4}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظاس}}{\text{س}}$ تساوى

(أ) ٠   (ب) ١   (ج) $\frac{٤}{\pi}$   (د) ليس للدالة نهاية

(١٣) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{\text{س}^{٣} - ٢٧}$ تساوى

(أ) ٠   (ب) $\frac{٥}{٣}$   (ج) ١٥   (د) ٩

(١٤) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{أ}}{\text{س} - ٢}$ لها وجود فإن أ تساوى:

(أ) -١   (ب) ١   (ج) ٢   (د) ٤

(١٥) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٥}{(\text{س}-٢)^{٣}}$ تساوى:

(أ) $-\frac{٥}{٢}$   (ب) صفر   (ج) ٥   (د) ليس للدالة نهاية

**أوجد قيمة كل من النهايات الآتية (إن وجدت)**

(١٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} (\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢)$

(١٧) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} - ٣}$

(١٨) $\underset{\text{س}\to\frac{\pi}{2}}{\text{نهـا}} (٢\text{س} - \text{جاس})$

(١٩) $\underset{\text{س}\to\pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{س}}$

(٢٠) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٣} + ١}$

(٢١) $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}} \frac{٩ - \text{س}}{\text{س}^{٢} - ٨١}$

(٢٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

(٢٣) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}$

(٢٤) $\underset{\text{س}\to ٩}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + \sqrt{\text{س}} - ١٢}{\text{س} - ٩}$

(٢٥) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{س}+٢} - \frac{١}{٢}}{\text{س}}$

(٢٦) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٤} - ١٦}$

(٢٧) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{\text{س}} + \frac{\text{س}^{٢} - \text{س}}{\text{س} - ١}\right)$

(٢٨) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٤}{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}}$

(٢٩) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٣} - ٤\text{س}^{٢} - \text{س} + ٤}{٢\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ٤}$

(٣٠) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ١٥}$

(٣١) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س} - ٢}$

(٣٢) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٨} - (١٦)^{-٢}}{\text{س} - ٢}$

(٣٣) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[3]{\text{س}} - ١}{\text{س} - ١}$

(٣٤) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{-٩} - \frac{١}{٥١٢}}{\text{س} - ٢}$

(٣٥) $\underset{\text{س}\to\sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\text{س}^{٤} - \sqrt{٢٥}}$

(٣٦) $\underset{\text{س}\to ٨١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt[4]{\text{س}} - ٣}{\text{س} - ٨١}$

(٣٧) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٧} - ١٢٨}{\text{س}^{٥} - ٣٢}$ (٣٨) $\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س} - ٥)^{٧} - ١}{\text{س} - ٦}$ (٣٩) $\underset{\text{س}\to ٧}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt[٥]{\text{س} + ٢٥} - ٢}{\text{س} - ٧}$

(٤٠) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٦} - ١}{\text{س} - ٢}$ (٤١) $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(\text{س} - ٢\text{هـ})^{١٧} - \text{س}^{١٧}}{٥١\ \text{هـ}}$ (٤٢) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٤} - ٨١}{\text{س}^{٥} + ٢٤٣}$

(٤٣) $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(٣ + \text{هـ})^{٤} - ٨١}{٦\ \text{هـ}}$ (٤٤) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٨} - ٣}{\text{س} + ١}$ (٤٥) $\underset{\text{س}\to -٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٧} - ٢}{\text{س} + ٣}$

(٤٦) $\underset{\text{س}\to ٣}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{\text{س} + ١} - ٢}{\sqrt{\text{س} + ٦} - ٣}$ (٤٧) $\underset{\text{س}\to -١}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{\text{س} + ١}$ (٤٨) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{(٢\text{س} - ١)^{٢} - ١}{٥\text{س}}$

(٤٩) $\underset{\text{س}\to ١}{\text{نهـا}}\ \left(\dfrac{١}{\text{س} - ١} - \dfrac{٣}{\text{س}^{٣} - ١}\right)$ (٥٠) $\underset{\text{س}\to -٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٨\text{س} - ١٢}$ (٥١) $\underset{\text{س}\to ٤}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\sqrt{٢\text{س} + ١} - ٣}{\text{س} - ٤}$

## نشاط

(٥٢) **الربط بالحجم** صنعت علبة مفتوحة من أعلى من ورق مقوى على شكل مربع طول ضلعه ٢٤سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانها الأربعة. طول ضلع كل منها س سم.

**أولًا:** ارسم شكلًا توضيحيًا للعلبة. **ثانيًا:** أثبت أن حجم العلبة يعطى بالعلاقة ع = س$(٢٤ - ٢\text{س})^{٢}$

**ثالثًا:** أوجد حجم العلبة عندما س = ٤ وذلك بدراسة قيم الدالة عندما س ← ٤ مستخدمًا الجدول التالي:

| س | ٣ | ٣,٥ | ٣,٩ | ← | ٤ | → | ٤,١ | ٤,٥ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ع | ........ | ........ | ........ | ← | ........ | → | ........ | ........ | ........ |

**رابعًا:** استخدم أحد البرامج الرسومية لرسم العلاقة والتحقق من أن القيمة العظمى للحجم توجد عند س = ٤

**تفكير إبداعي:**

(٥٣) إذا كان $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{د(س)} - ٥}{\text{س} - ٢} = ١$ **فأوجد:** $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$

(٥٤) إذا كان $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{د(س)}}{\text{س}^{٢}} = ٥$ **فأوجد:**

(أ) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \text{د(س)}$ (ب) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{د(س)}}{\text{س}}$

(٥٥) **الربط بالتجارة:** وجدت شركة أنها لو أنفقت س من الجنيهات للدعاية لمنتجها، فإن ربحها يعطى بالعلاقة د(س) = $٠,٢\ \text{س}^{٢} + ٤٠\ \text{س} + ١٥٠$. أوجد مقدار ربح الشركة عندما يقترب إنفاقها على الدعاية من ١٠٠ جنيه.

# ٣ - ٣ نهاية الدوال المشتملة على اللانهاية

*Limit of the Function involving Infinity*

**سوف تتعلم**

- نهاية الدالة عند اللانهاية.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل الجبرى.
- إيجاد نهاية الدالة عند اللانهاية باستخدام الحل البياني.

**المصطلحات الأساسية**

- نهاية دالة عند اللانهاية.

Limit of a Function at Infinity

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

نحتاج فى كثير من التطبيقات العملية والحياتية إلى معرفة سلوك الدالة د(س) عندما س ⟵ ∞ والنشاط التالى يوضح ذلك.

## نشاط

استخدم أحد برامج الحاسوب فى رسم الدالة د حيث: د(س) = $\frac{1}{س}$ ، س > ٠

ماذا تلاحظ من منحنى الشكل إذا ازدادت قيم س الموجبة حتى تقترب من ما لانهاية؟

من الشكل المرسوم **نلاحظ أن:**

- كلما زادت قيم س واقتربت من ما لا نهاية اقتربت قيم د(س) من عدد محدد.

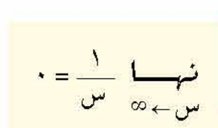
**أكمل الجدول التالى** لإيجاد العدد الذى تقترب منه د(س)

| س | ١٠ | ١٠٠ | ١٠٠٠ | ١٠٠٠٠ | ١٠٠٠٠٠ | س ← ∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | ٠,١ | ٠,٠١ | | | | س ← ؟ |

## تعلم

### نهاية دالة عند اللانهاية — *Limit of a Function at Infinity*

من النشاط السابق نجد أنه كلما اقتربت س من ما لانهاية اقتربت قيم د(س) من الصفر.

**نظرية** 

$$\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{1}{س} = ٠$$

**نتيجة** 

$$\underset{س \to \infty}{نهـا} \frac{أ}{س^{ن}} = ٠ \quad \{حيث ن \in ع^{+} ، أ ثابت\}$$

**قواعد أساسية:**

- $\underset{س \to \infty}{نهـا}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت
- إذا كان ن عددًا موجبًا فإن $\underset{س \to \infty}{نهـا} س^{ن} = \infty$

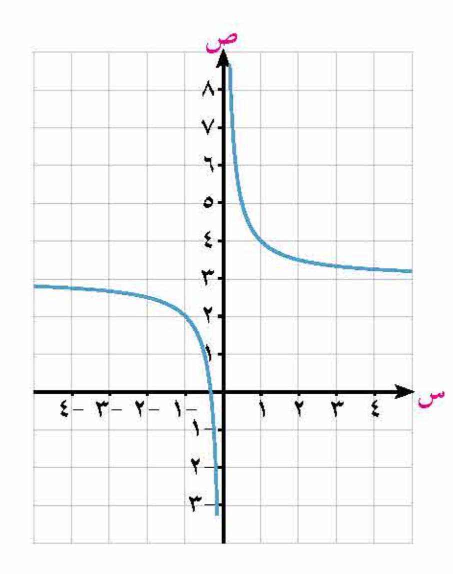
**لاحظ أن:** نظرية (٢) المتعلقة بنهاية مجموع أو فرق أو ضرب أو قسمة دالتين عند س ⟵ أ السابق دراستها في الدرس السابق صحيحة عندما نضع س ⟵ ∞ بدلًا من س ⟵ أ

## مثال

(١) أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( \frac{١}{س} + ٣ \right)$ ب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( ٤ - \frac{٣}{س^{٢}} \right)$

➢ ثم تحقق من ذلك بيانيًا باستخدام أحد البرامج الرسومية.



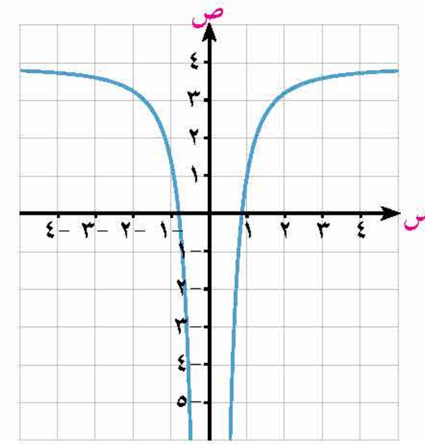


**الحل**

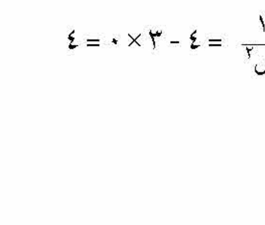
أ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( \frac{١}{س} + ٣ \right) = \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} + \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} ٣$

$= ٠ + ٣ = ٣$

$\therefore \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( \frac{١}{س} + ٣ \right) = ٣$



ب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( ٤ - \frac{٣}{س^{٢}} \right) = \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} ٤ - \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{س^{٢}}$



$= ٤ - ٣ \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{س^{٢}} = ٤ - ٣ \times ٠ = ٤$

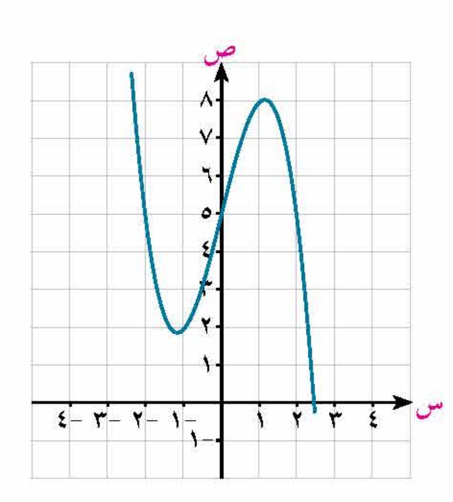
$\therefore \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( ٤ - \frac{٣}{س^{٢}} \right) = ٤$

**حاول أن تحل**

(١) أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( \frac{٥}{س} + ٢ \right)$ ب $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( \frac{٢}{س^{٢}} + ٥ \right)$

## مثال



(٢) أوجد: $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( ٤ س - س^{٣} + ٥ \right)$

**الحل**

$\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} س^{٣} \left( \frac{٤}{س^{٢}} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}} \right)$

$= \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} س^{٣} \times \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \left( \frac{٤}{س^{٢}} - ١ + \frac{٥}{س^{٣}} \right)$

$= \infty \times -١ = -\infty$

### حاول أن تحل

**٢** أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

أ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (\text{س}^{٣} + ٧\text{س}^{٢} + ٢)$ 　　 ب $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (٤ - ٣\text{س} - \text{س}^{٣})$

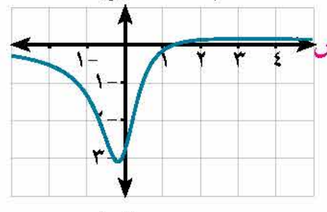
## مثال

**٣** أوجد كلًّا من النهايات الآتية:

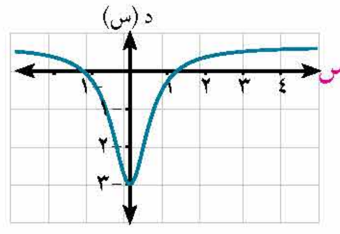
أ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٢\text{س} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$ 　　 ب $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$ 　　 جـ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١}$

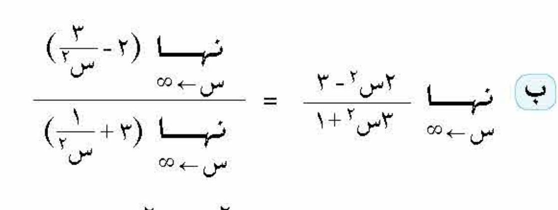
### الحل

فى كل الحالات يقسم كل من البسط والمقام على س$^{٢}$ (أعلى قوة للمتغير س فى المقام).




أ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٢\text{س} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}})}{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (٣ + \frac{١}{\text{س}^{٢}})} = \dfrac{٠ - ٠}{٣ + ٠} = ٠$



ب $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٢\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (٢ - \frac{٣}{\text{س}^{٢}})}{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (٣ + \frac{١}{\text{س}^{٢}})}$

$= \dfrac{٢ - ٠}{٣ + ٠} = \dfrac{٢}{٣}$

جـ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٢\text{س}^{٣} - ٣}{٣\text{س}^{٢} + ١} = \dfrac{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (٢\text{س} - \frac{٣}{\text{س}^{٢}})}{\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} (٣ + \frac{١}{\text{س}^{٢}})}$

$= \dfrac{\infty - ٠}{٣ + ٠} = \infty$

**نستنتج من هذا المثال أن:** عند إيجاد $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

- النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.
- النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط $<$ درجة المقام.
- النهاية تعطى $\pm \infty$ إذا كانت درجة البسط $>$ درجة المقام.
- يستخدم هذا الاستنتاج فقط للتحقق من حلول المسائل باستخدام النظرية والنتيجة ولاتعتبر طريقة حل.

### حاول أن تحل

**٣** أوجد:

أ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١}{٢\text{س}}$ 　　 ب $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{٤\text{س}^{٣} - ٥\text{س}}{٨\text{س}^{٤} + ٣\text{س}^{٢} - ٢}$ 　　 جـ $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow \infty} \dfrac{-٦\text{س}^{٢} + ١}{٣\text{س}^{٣} + \text{س} - ٢}$

## مثال

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{3} - 2}{|س|^{3} + 1}$

ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(س - \sqrt{س^{2} + 4}\right)$

### الحل

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{3} - 2}{|س|^{3} + 1}$

$\because$ س $\longrightarrow \infty$

$\therefore$ س $> 0$ **أى أن** $|س| = س$

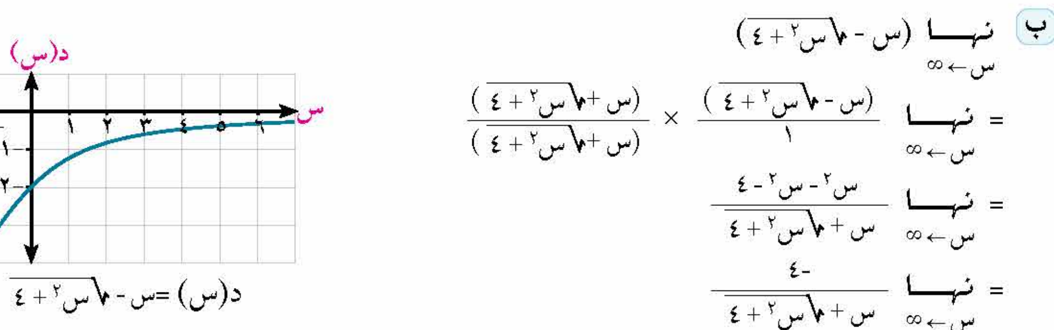
$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{3} - 2}{س^{3} + 1}$

د(س) $= \dfrac{س^{3} - 2}{|س|^{3} + 1}$

**بقسمة كل من البسط والمقام على** $س^{3}$

$= \dfrac{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 - \dfrac{2}{س^{3}}\right)}{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \dfrac{1}{س^{3}}\right)} = \dfrac{1 - 0}{1 + 0} = 1$

ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(س - \sqrt{س^{2} + 4}\right)$



$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{\left(س - \sqrt{س^{2} + 4}\right)}{1} \times \dfrac{\left(س + \sqrt{س^{2} + 4}\right)}{\left(س + \sqrt{س^{2} + 4}\right)}$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{2} - س^{2} - 4}{س + \sqrt{س^{2} + 4}}$

$= \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-4}{س + \sqrt{س^{2} + 4}}$

د(س) $= س - \sqrt{س^{2} + 4}$

$\because$ س $\longrightarrow \infty$

$\therefore$ س $> 0$ **أى أن:** $\sqrt{س^{2}} = |س| = س$ **بقسمة كل من البسط والمقام على** $س = \sqrt{س^{2}}$

$\therefore \underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{-4}{س + \sqrt{س^{2} + 4}} = \dfrac{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} - \dfrac{4}{س}}{\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4}{س^{2}}}\right)} = \dfrac{0}{1 + 1} = 0$

### حاول أن تحل

④ أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{س - 3}{\sqrt{4س^{2} + 25}}$

ب $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{3س^{2} + 5س} - \sqrt{3}\,س\right)$

## تمـــاريـن الدرس ٣ – ٣

**أكمل ما يأتى:**

(١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(١ + \frac{٣}{س}\right) =$ ..................

(٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{٣}{س^{٢}} - ٢\right) =$ ..................

(٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (-٧) =$ ..................

(٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ٣) =$ ..................

(٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س + ١}{س}$ ..................

(٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٥}{س^{٢} + ١} =$ ..................

(٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٥} + ٣}{س^{٣} - ٥} =$ ..................

(٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣س}{\sqrt{س^{٢} - ١}} =$ ..................

(٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٣ - \frac{٧}{س} + \frac{٤}{س^{٢}}\right) =$ ..................

(١٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{س^{٢} + ١} - س\right) =$ ..................

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٦س}{٢س + ٣}$ تساوى

أ صفر    ب ٢    ج ٣    د $\infty$

(١٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{٤}{س} + ١}$

أ صفر    ب ١    ج ٢    د $\infty$

(١٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س + ٣}{٢ - س^{٢}}$

أ صفر    ب $\frac{١}{٢}$    ج $\frac{٣}{٢}$    د $\infty$

(١٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ١}{٢س^{٢} - ١}$

أ صفر    ب $\frac{١}{٢}$    ج ١    د $\infty$

(١٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \sqrt{\frac{س + ١}{٤س - ١}}$

أ -١    ب $\frac{١}{٤}$    ج $\frac{١}{٢}$    د ١

**أوجد:**

(١٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣}{س^{٢}}$

(١٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} (س^{٣} + ٥س^{٢} + ١)$

(١٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٧س}{٢ + ٣س}$

(١٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢}}{س + ٣}$

(٢٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤س^{٢}}{س^{٢} + ٣}$

(٢١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٥ - ٦س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} + س + ٤}$

(٢٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س - ١}{س^{٢} + ٤س + ١}$

(٢٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٢}{٣س^{٢} + ٤س - ١}$

(٢٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ١}{٤س^{٣} - ٥س - ١}$

(٢٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{٢} - ٦}{(س - ١)^{٢}}$

(٢٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(٧ + \frac{٢س^{٢}}{(س + ٣)^{٢}}\right)$

(٢٧) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{٣س^{٢}} - \frac{٥س}{س + ٢}\right)$

(٢٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\frac{س}{٢س + ١} + \frac{٣س^{٢}}{(س - ٣)^{٢}}\right)$

(٢٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{- س}{\sqrt{٤ + س^{٢}}}$

(٣٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٣} - ٤س + ٥}{(٢س - ١)^{٣}}$

(٣١) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٤س^{٢} - ٢س + ١} - ٢س\right)$

(٣٢) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{٥س^{٢} + ٤س + ٧} - \sqrt{٥س^{٢} + س + ٣}\right)$

(٣٣) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} س \left(\sqrt{٤س^{٢} + ١} - ٢س\right)$

(٣٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + س - ١}{٨س^{٢} - ٣}$

(٣٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٤ - ٣س^{٣}}{\sqrt{س^{٦} + ٩}}$

(٣٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^{٣}(٣ - ٢س^{٢})}{٣س(س ٢ + ٧)^{٢}}$

(٣٧) إذا كان $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \left(\sqrt{أس^{٢} + ٣ب س + ٥} - ٢س\right) = ٣$ فما قيمة كل من أ، ب.

(٣٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{س^{-١} + ٣س^{-٢} + ٥}{٢س^{-٢} - س^{-٣} + ١}$

(٣٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٢س^{-١} - ٣س^{-٢} + س^{-٣}}{٤س^{-٣} + س^{-١}}$

(٤٠) **تفكير إبداعي**

تنتج إحدى الشركات بطاقات معايدة بتكلفة ابتدائية قدرها ٥٠٠٠ جنيه وتكلفة الكارت نصف جنيه، فكانت التكلفة الإجمالية جـ = $\frac{١}{٢}$ س + ٥٠٠٠ حيث س عدد البطاقات المنتجة.

**أوجد:**

(١) تكلفة إنتاج الكارت عند إنتاج:

أ ١٠٠٠٠ كارت    ب ١٠٠٠٠٠ كارت

(٢) أوجد تكلفة إنتاج الكارت عندما تنتج الشركة عددًا لا نهائيًا من الكروت.

# ٣ - ٤ نهايات الدوال المثلثية

*Limits of Trigonometric Functions*

**سوف تتعلم**

- نهايات بعض الدوال المثلثية.

**المصطلحات الأساسية**

- دالة مثلثية
Trigonometric Function
- نهاية دالة مثلثية
Limit of a Trigonometric Function

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية

## نشاط

اذا كانت د دالة حيث د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ والمطلوب دراسة قيم الدالة د عندما س ← ٠ حيث س قياس الزاوية بالتقدير الدائري

كون جدولًا لدراسة سلوك الدالة د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ عندما تقترب س من الصفر مستخدمًا التقدير الدائرى

| س | ١ | ٠,١ | ٠,٠١ | ← | ٠ | → | ٠,٠١- | ٠,١- | ١- |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ | ٠,٨٤١٥ | ٠,٩٩٨٣ | ٠,٩٩٩٩٨ | ← | .......... | → | .......... | ٠,٩٩٨٣ | ٠,٨٤١٥ |

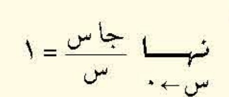
من الجدول السابق استنتج $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$



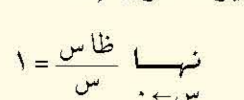
## تعلم

**نظرية ١**

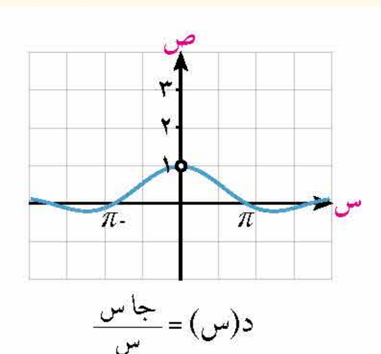
إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الدائرى فإن:



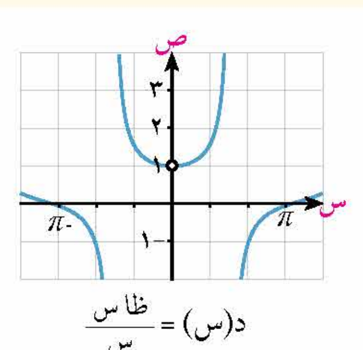
$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} = ١$



$\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{ظا س}}{\text{س}} = ١$




د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$




د(س) = $\frac{\text{ظا س}}{\text{س}}$

**تعبير شفهي**

إذا كانت س قياس الزاوية بالتقدير الستيني فهل يمكن إيجاد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ فسر إجابتك.

**نتيجة ا:** $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{جا ا س}}{\text{س}} = \text{ا}$ ، $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٠} \frac{\text{ظا ا س}}{\text{س}} = \text{ا}$

**أضف إلى معلوماتك**

يوجد لهذه النظرية أكثر من برهان يمكن الاطلاع عليه من الرابط:
http://math.stackexchange.com/question/75130

## مثال

(١) أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا ٣س}}{\text{س}} = ٣$ ب $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{٧ س}} = \frac{٢}{٧}$ ، $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}} = \frac{١}{٧}$

جـ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا ٥ س جتا ٢ س}}{\text{س}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا ٥س}}{\text{س}} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \text{ جتا ٢ س} = ٥ \times ١ = ٥$

### حاول أن تحل

(١) أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا ٢س}}{\text{س}^٣}$ ب $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{ظا ٤س}}{\text{٥ س}}$ جـ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا } \pi \text{ س}}{\text{١ - س}}$

### نتيجة ٢

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتاس}}{\text{س}} = \text{صفر}$




➤ استعن بمدرسك فى برهان نتيجة (٢)

## مثال

(٢) أوجد:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتاس}}{\text{ظا س}}$ ب $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتاس}}{\text{س}^٢}$

### الحل

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتاس}}{\text{ظا س}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتاس}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا س}}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتاس}}{\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{ظا س}} = ٠ \times ١ = ٠$

ب $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتاس}}{\text{س}^٢} \times \frac{\text{١ + جتاس}}{\text{١ + جتاس}}$

$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢\text{(١+جتاس)}} = \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢\text{(١+جتاس)}}$

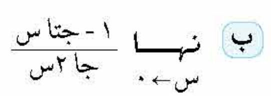
$= \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{\text{س}^٢} \times \underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{١}{\text{١ + جتاس}} = (١)^٢ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$

> **تذكر أن**
>
> $\text{جا}^٢\text{س} + \text{جتا}^٢\text{س} = ١$

### حاول أن تحل

(٢) أوجد النهايات الآتية:

أ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \text{ ٦س}^٢ \text{ قتا ٢س ظتا س}$

ب  $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \frac{\text{١ - جتا س}}{\text{جا ٢س}}$

## مثال

**٣** أوجد النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س}^٢ - \text{س} + \text{جا س}}{٢\text{س}}$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س} + \text{س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$

ج) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا س})}{١ - \text{جتا س}}$

د) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}{٥\text{ س}^٢}$

### الحل

أ) $= \frac{١}{٢} \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left(\frac{\text{س}^٢}{\text{س}} - \frac{\text{س}}{\text{س}} + \frac{\text{حاس}}{\text{س}}\right)$

$= \frac{١}{٢} \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \left(\text{س} - ١ + \frac{\text{جا س}}{\text{س}}\right)$

$= \frac{١}{٢} (٠ - ١ + ١) = ٠$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{س} + \text{س جتا س}}{\text{جا س جتا س}}$ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$= \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{١ + \text{جتا س}}{\frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}}$

$= \frac{\lim\limits_{\text{س}\to ٠} (١ + \text{جتا س})}{\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا س}}{\text{س}} \times \text{جتا س}}$

$= \frac{١ + \text{جتا }٠}{١ \times \text{جتا }٠} = \frac{١ + ١}{١} = ٢$

ج) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا س})}{١ - \text{جتا س}}$

اعتبر ١ - جتا س = ص

عندما س ⟵ ٠ نجد أن ص ⟵ ٠

$\lim\limits_{\text{ص}\to ٠} \frac{\text{جا ص}}{\text{ص}} = ١$

$\therefore \lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}(١ - \text{جتا س})}{١ - \text{جتا س}} = ١$

د) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢ ٣\text{س}}{٥\text{ س}^٢}$

$= \frac{١}{٥} \left(\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}٣\text{س}}{\text{س}}\right)^٢$

$= \frac{١}{٥} \times (٣)^٢$

$= \frac{٩}{٥}$

## حاول أن تحل

**٣** أوجد النهايات الآتية:

أ) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا }٣\text{س}}{٥\text{ س}^٣ - ٤\text{س}}$

ب) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{جا}(\text{س}-١)}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٢}$

ج) $\lim\limits_{\text{س}\to ٠} \frac{\text{جا}^٢\text{س}}{٣\text{ س}^٢}$

د) $\lim\limits_{\text{س}\to ١} \frac{\text{س جا }٢\text{س} + \text{حا}^٢ ٢\text{س}}{\text{طا}^٢ ٣\text{س} + \text{س}^٢}$




**أكمل مايأتي:**

(١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ جتا } ٣\text{ س} =$ ..................

(٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \text{ جا } ٢\text{ س} =$ ..................

(٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \text{ ظا س} =$ ..................

(٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٧\text{ س}}{\text{س}} =$ ..................

(٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٣\text{س}}{٤\text{س}} =$ ..................

(٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا }(\text{س} - ٥)}{٣\,(\text{س} - ٥)} =$ ..................

(٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } \pi\text{س}}{٢\text{ س}} =$ ..................

(٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢\text{ س}}{\text{س}^٢} =$ ..................

(٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٣ + ٢\text{ س}}{\text{جتا } ٤\text{ س}} =$ ..................

(١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{جتا س}}{٣\text{ س}} =$ ..................

(١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ س}}{\text{ظا } ٣\text{ س}} =$ ..................

(١٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٣\text{ س قتا } ٢\text{ س} =$ ..................

(١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢ ٢\text{ س}}{٣\text{ س}^٢} =$ ..................

(١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢\text{ س ظا } ٣\text{س}}{٤\text{س}^٢} =$ ..................

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:**

(١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٣\text{ س}}{\text{س}}$ تساوى

أ) صفر  ب) $\frac{١}{٣}$  جـ) ١  د) ٣

(١٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } ٤\text{س}}{٥\text{س}}$ تساوى

أ) صفر  ب) $\frac{٤}{٥}$  جـ) ١  د) $\frac{٥}{٤}$

(١٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } ٢\text{ س} + ٣\text{ ظا س}}{٥\text{س}}$ تساوى

أ) ١  ب) $\frac{٥}{٦}$  جـ) $\frac{٦}{٥}$  د) ٢

(١٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}^٢ ٢\text{ س}}{\text{س جا } ٣\text{ س}}$ تساوى

أ) $\frac{٤}{٩}$  ب) $\frac{١}{٢}$  جـ) $\frac{٢}{٣}$  د) $\frac{٤}{٣}$

(١٩) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } \frac{١}{٢}\text{ س}}{\text{جا } \frac{٣}{٤}\text{ س}}$ تساوى

أ) $\frac{١}{٦}$  ب) $\frac{٣}{٨}$  جـ) $\frac{١}{٢}$  د) $\frac{٢}{٣}$

(٢٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ حيث س بالتقدير الستينى

أ) ١  ب) $\frac{\pi}{١٨٠}$  جـ) $\frac{١٨٠}{\pi}$  د) $\pi$

**أوجد:**

٢١) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{٥س}}$

٢٢) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا س}}{\text{ظا س}}$

٢٣) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا ٢س}}{\text{س}}$

٢٤) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٣(١- جتا س)}}{\text{س}}$

٢٥) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا س (١ - جتا س)}}{\text{س}^{٢}}$

٢٦) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جتا س ظا س}}{\text{س}}$

٢٧) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا}^{٢}\text{ س}}{\text{س}}$

٢٨) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا}^{٢}\text{ ٣س}}{\text{س}^{٢}}$

٢٩) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{(١ - جتا}^{٢}\text{ س)}}{\text{س}^{٢}}$

٣٠) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جتا س - ١}}{\text{جا س}}$

٣١) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س - س جتا س}}{\text{جا}^{٢}\text{ ٣س}}$

٣٢) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{١ - ظا س}}{\text{جاس - جتا س}}$

٣٣) $\underset{\text{س}\to\frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س جتا (-٢س+١)}}{\text{س}^{٢}\text{+س}}$

٣٤) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}^{٢}\text{ - ٣ جا س}}{\text{س}}$

٣٥) $\underset{\text{س}\to\text{٠}^{-}}{\text{نهـا}}\ \text{(١ + جتا س)} \times \frac{\text{١ - جتا س}}{\text{س}^{٢}}$

٣٦) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا ٣س}^{٢}\text{ +حا}^{٢}\text{ ٥س}}{\text{س}^{٢}}$

٣٧) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا ٥س}^{٣}\text{+جا}^{٣}\text{٥س}}{\text{٢ س}^{٣}}$

٣٨) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \left(\frac{\text{٢س}^{٢}\text{ + جا ٣س}}{\text{٢س}^{٢}\text{ +ظا ٦ س}}\right)^{٤}$

٣٩) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٢س}^{٣}\text{ +س جا ٥س}}{\text{س}^{٢}\text{ - ظا ٣ س}^{٢}}$

٤٠) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{١ - جتاس + جا س}}{\text{١ - جتا س - جا س}}$

٤١) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا ٢س +٥ جا ٣ س}}{\text{٢ جا ٣ س - ظا ٥س}}$

٤٢) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س ظا ٢ س}}{\text{س}^{٢}\text{ + جا}^{٢}\text{ ٣س}}$

٤٣) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{١ - جتا ٣س}}{\text{حتا}^{٢}\text{ ٢س - ١}}$

٤٤) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{٢ - جتا ٣ س - جتا ٤ س}}{\text{س}}$

٤٥) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ظا ٣ س}^{٢}\text{ + جا}^{٢}\text{ ٥ س}}{\text{س}^{٢}}$

٤٦) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{١ - جتا ٣ س}}{\text{جتا}^{٢}\text{ ٥ س -١}}$

٤٧) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{جا (جا س)}}{\text{٥ جا س}}$

٤٨) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{س}}{\text{جتا}\left(\frac{\pi}{٢}\text{ - س}\right)}$

٤٩) $\underset{\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \text{س (قتا ٢ س - ظتا ٣ س)}$

# ٣ - ٥ بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة

*Existence of Limit of a Function at a Point*

**سوف تتعلم**

- النهاية اليمنى للدالة عند نقطة.
- النهاية اليسرى للدالة عند نقطة.
- بحث وجود نهاية للدالة عند نقطة.

**المصطلحات الأساسية**

- نهاية يمنى Right Limit
- نهاية يسرى Left Limit

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

## فكر و ناقش

### شكل (١)

يمثل منحنى الدالة د حيث

$$د(س) = \begin{cases} س - ١ & \text{لكل } س > ٢ \\ ٣ - س & \text{لكل } س < ٢ \end{cases}$$

شكل (١)

- أوجد $\lim_{س \to ٢^+} د(س)$ (النهاية اليمنى)
- أوجد $\lim_{س \to ٢^-} د(س)$ (النهاية اليسرى)

هل $\lim_{س \to ٢^+} د(س) = \lim_{س \to ٢^-} د(س)$

### شكل (٢):

يمثل الدالة ر حيث

$$ر(س) = \begin{cases} ٢ & \text{لكل } س > ٠ \\ -٢ & \text{لكل } س < ٠ \end{cases}$$

شكل (٢)

- أوجد $\lim_{س \to ٠^+} ر(س)$
- أوجد $\lim_{س \to ٠^-} ر(س)$ هل $\lim_{س \to ٠^+} ر(س) = \lim_{س \to ٠^-} ر(س)$

## تعلم

### نهاية الدالة Limit of a Function

**النهاية اليمنى و النهاية اليسرى**

يقال إن نهاية الدالة د تساوى ل عندما س تؤول إلى أ إذا وفقط إذا كان نهايتها من اليمين ونهايتها من اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل حيث ل ∋ ع

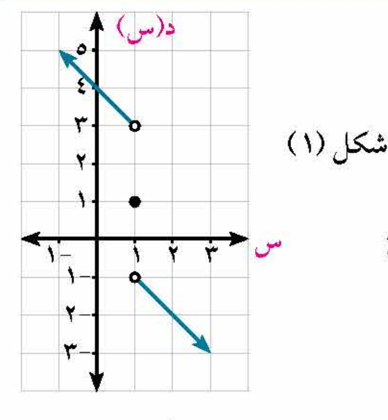
وتكتب رمزيًّا:

$\lim_{س \to أ} د(س) = ل$ إذا و فقط إذا كان: د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = ل

حيث: د $(أ^+) = \lim_{س \to أ^+} د(س)$ « النهاية اليمنى للدالة»

د $(أ^-) = \lim_{س \to أ^-} د(س)$ « النهاية اليسرى للدالة»

## مثال توضيحى



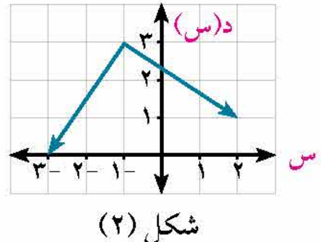
شكل (١)

أ لاحظ فى شكل (١) أن:

د(١⁻) = ٣ ، د(١⁺) = -١

∴ د(١⁻) ≠ د(١⁺)

∴ لايوجد نهاية للدالة د عند س ⟵ ١ ∴ نهـــا (س ← ١) د(س) غير موجودة



شكل (٢)

ب لاحظ فى شكل (٢) أن:

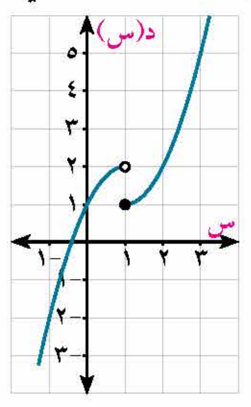
د(-١⁻) = ٣ ، د(-١⁺) = ٣

∴ د(-١⁻) = د(-١⁺) = ٣

∴ نهـــا (س ← -١) د(س) = ٣

### حاول أن تحل

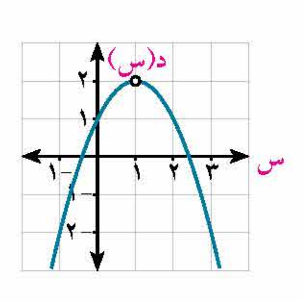
١ ادرس الشكل البياني لكل دالة من الدوال الآتية ثم أوجدْ:



أ د(١⁻)

ب د(١⁺)

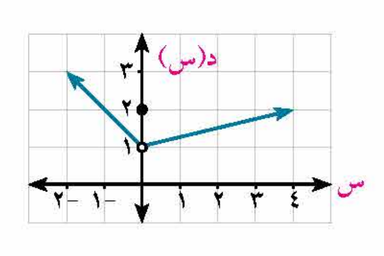
جـ نهـــا (س ← ١) د(س)



أ د(١⁻)

ب د(١⁺)

جـ نهـــا (س ← ١) د(س)



أ د(٠⁻)

ب د(٠⁺)

جـ نهـــا (س ← ٠) د(س)

### مثال

١ ابحث وجود نهاية الدالة د حيث د(س) = { س |س| - ١ عندما س < ٠ ، $\frac{|س|}{س}$ - ٢ عندما س > ٠ } عندما س ← ٠

### الحل

**بإعادة تعريف الدالة**

د(س) = { س(-س) - ١ عندما س < ٠ ، $\frac{س}{س}$ - ٢ عندما س > ٠ } = { -س² - ١ لكل س < ٠ ، -١ لكل س > ٠ }

∵ د(٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) د(س) = نهـــا (س ← ٠⁻) (-س² - ١) = -١

د(٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) -١ = -١ ∵ د(٠⁻) = د(٠⁺) = -١ ∴ نهـــا (س ← ٠) د(س) = -١

### حاول أن تحل

(٢) إذا كان د(س) = $\begin{cases} |س - ٣| & س \neq ٣ \\ ٢ & س = ٣ \end{cases}$

فأبحث وجود $\lim_{س \to ٣}$ د(س)

## مثال

(٢) ابحث وجود نهاية للدلة د حيث: د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س}{س} & لكل\ س < ٠ \\ \frac{س + ظا ٢س}{٣س - جا٢س} & لكل\ س > ٠ \end{cases}$ عندما س ← ٠

### الحل

$د(٠^-) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{س^٢ + ٢س}{س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{س(س + ٢)}{س}$

$= \lim_{س \to ٠^-} (س + ٢) = ٢$

$د(٠^+) = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س + ظا ٢س}{٣س - جا٢س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{\frac{س}{س} + \frac{ظا٢س}{س}}{\frac{٣س}{س} - \frac{جا٢س}{س}} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{١ + \frac{ظا٢س}{س}}{٣ - \frac{جا٢س}{س}}$

$= \frac{١ + ٢}{٣ - ٢} = ٣$

$\because د(٠^-) \neq د(٠^+)$ $\therefore \lim_{س \to ٠}$ د (س) غير موجودة

### حاول أن تحل

(٣) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ $\pi$ حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{جاس}{س - \pi} & لكل\ س < \pi \\ جتا س & لكل\ س > \pi \end{cases}$

## مثال

(٣) ابحث وجود نهاية للدلة د عندما س ⟵ ١ حيث: د(س) = $\sqrt{س - ١}$

### الحل

$\because$ د (س) معرفة لجميع قيم س - ١ $\geqslant$ ٠ $\therefore$ مجال الدالة د (س) = [١ ، ∞ [

$\because د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} د(س)$ $\therefore د(١^+) = \lim_{س \to ١^+} \sqrt{س - ١}$ = صفر

د $(١^-)$ غير معرفة لأن الدالة غير معرفة على يسار ١

$\therefore$ د (س) ليس لها نهاية عندما س ⟵ ١

### حاول أن تحل

(٤) ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ← ٣ حيث د (س) = $\sqrt{٣ - س}$



## تمارين ٣ – ٥





**أكمل ما يأتى:**

١) من الشكل البيانى المقابل:

أ) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^-$)

ب) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^+$)

٢) من الشكل البيانى المقابل:

أ) نهــا د(س) = ................... (س ← $٣^-$)

ب) نهــا د(س) = ................... (س ← $٣^+$)

٣) من الشكل البيانى المقابل:

أ) نهــا د(س) = ................... (س ← -٢)

ب) نهــا د(س) = ................... (س ← ٠)

ج) نهــا د(س) = ................... (س ← ٢)

د) نهــا د(س) = ................... (س ← -٤)

هـ) نهــا د(س) = ................... (س ← ٤)

٤) الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٢ لكل س ≥ ٠ ، ٢ - س لكل س < ٠ }

أ) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^-$)

ب) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^+$)

٥) الدالة د معرفة على ع حيث د(س) = { ٣ لكل س > ٠ ، -٣ س لكل س ≤ ٠ }

أ) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^+$)

ب) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^-$)

٦) إذا كانت د(س) = { س لكل س ≥ ٠ ، $\frac{١}{س}$ لكل س < ٠ }

أ) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^+$)

ب) نهــا د(س) = ................... (س ← $٠^-$)

**ابحث وجود نهاية كل من الدوال الآتية :**

⑦ نهـــا د(س) حيث د(س) = { ٢ س لكل س < ٢ ، $س^{٢}$ لكل س ⩽ ٢ }
س ← ٢

⑧ نهـــا د(س) حيث د(س) = { $س^{٢}$ + ١ لكل س < ٣ ، ٣ س + ١ لكل س ⩽ ٣ }
س ← ٣

⑨ نهـــا د(س) حيث د(س) = { $س^{٢}$ + ٢ لكل س < ٠ ، ٣س + ١ لكل س ⩽ ٠ }
س ← ٠

⑩ نهـــا د(س) حيث د(س) = { ٢ س + ١ لكل س < -١ ، -١ لكل س > -١ }
س ← -١

⑪ أوجد قيمة م حتى تكون د(س) لها نهاية عندما س ⟵ ١ حيث د(س) = { $\frac{(س-١)^{٢}}{|س-١|}$ لكل س < ١ ، ٦س - ٣ م لكل س > ١ }

⑫ ابحث وجود نهاية للدالة د عندماس ⟵ ١ حيث د(س) = { $\frac{٢جا س}{\pi - س}$ لكل س < $\pi$ ، ١ + جتا س لكل س > $\pi$ }

عندما س ⟵ $\pi$

⑬ أوجد قيمة كل من م، ك إذا كان نهـــا د(س) = ٧ ، د(س) = { $س^{٢}$ + ٣م لكل س < ٢ ، ٥س + ك لكل س > ٢ }
س ← ٢

⑭ أوجد قيمة ك التى تجعل للدالة د(س) نهاية عندما س ⟵ -١ حيث، د(س) = { $س^{٢}$+ك لكل س < -١ ، س+٤ لكل س > -١ }

⑮ ابحث وجود نهاية للدالة د عندما س ⟵ ٠ حيث، د(س) = { $\frac{٥س + ظا٢س}{٦ س + جا س}$ لكل س > ٠ ، جتا س لكل س < ٠ }

⑯ ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) = { $\frac{٣ س}{ظا س}$ لكل - $\frac{\pi}{٣}$ < س < ٠ ، ٣ جتا س لكل ٠ > س > $\frac{\pi}{٣}$ }

أ عندما س ⟵ $\frac{-\pi}{٣}$ ب س ⟵ $\frac{\pi}{٣}$ ج س ⟵ ٠

⑰ ابحث وجود نهاية للدالة د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ عندما س ⟵ ٢

# ٣ - ٦ الاتصال

*Continuity*

### سوف تتعلم

- اتصال دالة عند نقطة.
- اتصال دالة على فترة.

### المصطلحات الأساسية

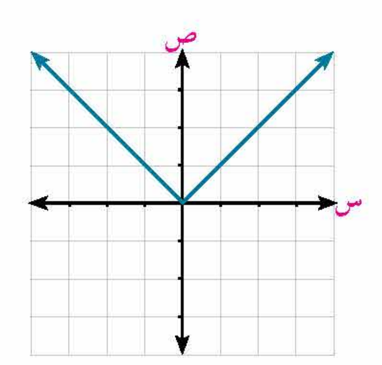
- اتصال دالة عند نقطة
  Continuity of a Function at a Point
- اتصال دالة على فترة
  Continuity of a Function on Interval

### الأدوات المستخدمة

- آلة حاسبة علمية
- برامج رسومية للحاسوب

## فكر و ناقش

تأمل الأشكال الآتية ثم بين ماذا تلاحظ؟

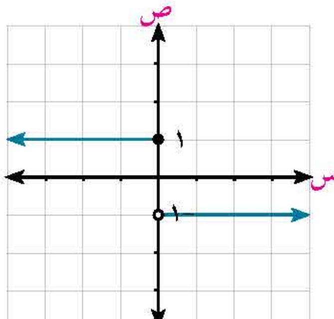


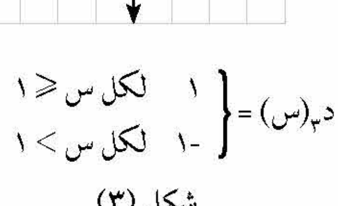

$د_١(س) = |س|$

شكل (١)

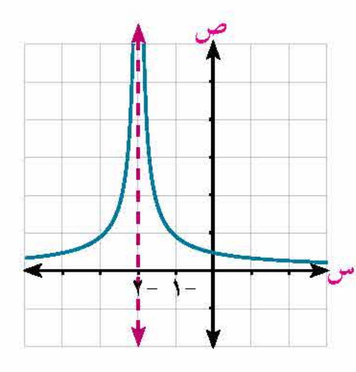
$د_٢(س) = ٢س^٣$

شكل (٢)




شكل (٣)




$د_٤(س) = \frac{١}{|س + ٢|}$

شكل (٤)

فى **شكل (١)** ، **(٢)** نلاحظ أن منحنى كل من الدالتين متصل وغير متقطع عند أى نقطة.

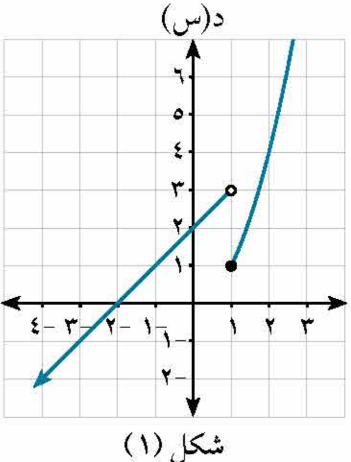
فى **شكل (٣)** منحنى الدالة غير متصل عند س = ..................

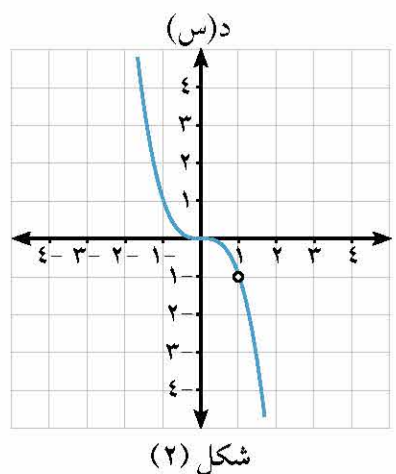
فى **شكل (٤)** منحنى الدالة غير متصل عند س = ..................

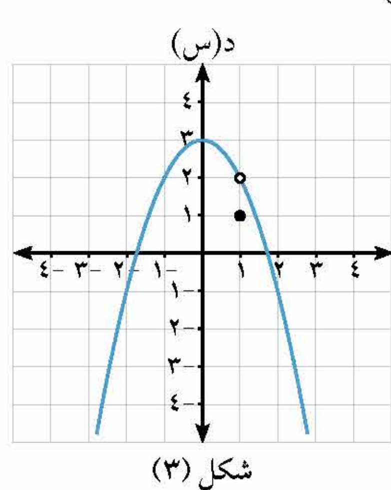
مما سبق **نستنتج أن** الدالة (د) تكون متصلة عند س = أ إذا كان منحنى الدالة لا يعانى انقطاعًا عند هذه النقطة، وتكون الدالة غير متصلة عند س = أ إذا انقطع منحناها عند هذه النقطة.

## اتصال دالة عند نقطة

Continuity of a fanction at a Point


شكل (١)


شكل (٢)


شكل (٣)

تأمل الأشكال السابقة ثم أوجد $\lim_{س \to ١}$ د(س)، د(١) إن وجدت.

**فى الشكل (١):** $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = ١ ، $\lim_{س \to ١^-}$ د(س) = ٣ **أى أن** $\lim_{س \to ١}$ د(س) غير موجودة بينما د(١) = ١

**فى الشكل (٢):** $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = -١ ، $\lim_{س \to ١^-}$ د(س) = -١ **أى أن** $\lim_{س \to ١}$ د(س) = -١ ، د(١) غير معرفة.

**فى الشكل (٣):** $\lim_{س \to ١^+}$ د(س) = ٢ ، $\lim_{س \to ١^-}$ د(س) = ٢ **أى أن** $\lim_{س \to ١}$ د(س) = ٢ بينما د(١) = ١

**أى أن:** $\lim_{س \to ١}$ د(س) $\neq$ د(١)

لذلك تكون الدالة د فى كل شكل من الأشكال السابقة غير متصلة عند س = ١




تكون الدالة د متصلة عندما س = أ ؛ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

- د(أ) معرفة
- $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة
- $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د (أ)

### مثال

#### بحث اتصال دالة عند نقطة

(١) ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} س & \text{لكل } س \leqslant ١ \\ س + ١ & \text{لكل } س > ١ \end{cases}$

أ عند س = ٠ ب عند س = ١

**الحل**

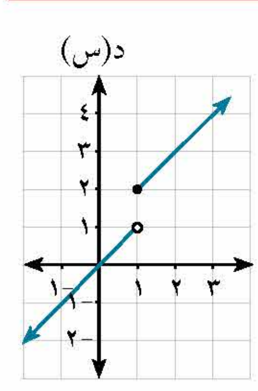
أ بحث الاتصال عند س = ٠

د(٠) = ٠، $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = $\lim_{س \to ٠}$ س = صفر ،

أى أن $\lim_{س \to ٠}$ د(س) = د(٠)

لذلك فإن الدالة متصلة عند س = ٠

ب بحث اتصال الدالة عند س = ١




نلاحظ أن قاعدة الدالة يمين النقطة س = ١ تختلف عن قاعدتها يسار تلك النقطة لذلك نبحث وجود نهاية يمنى ونهاية يسرى للدالة عند س =١

$د(١^+) = \underset{س \leftarrow ١}{نهـا} (س + ١) = ٢$ ، $د(١^-) = \underset{س \leftarrow ١}{نهـا} س = ١$

**أي أن:** $د(١^+) \neq د(١^-)$ وهذا الشرط يكفى لعدم اتصال الدالة د عند س = ١

والشكل البيانى يوضح عدم اتصال الدالة عند س = ١

### حاول أن تحل

① ابحث اتصال الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} ٤س - ١ & عندما\ س \leqslant ١ \\ س^٢ + ٢ & عندما\ س > ١ \end{cases}$ عند س = ١

### مثال

**التحقق من اتصال دالة عند نقطة**

② ابحث إتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة أمام كل منها:

أ $د(س) = \frac{س + ٣}{س - ٢}$ عند س = ٢، س = ٣

ب $د(س) = ٥ - |س - ٣|$ عند س = ٣

### الحل

أ **أولًا:** بحث اتصال الدالة عند س = ٢

∵ مجال الدالة = ح - {٢} ∴ د(س) غير معرفة عند س = ٢

∴ د(س) غير متصلة عند س = ٢

**ثانيًا:** بحث اتصال الدالة عند س = ٣

∵ $د(٣) = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦$ ، ∵ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} \frac{س + ٣}{س - ٢} = \frac{٣ + ٣}{٣ - ٢} = ٦$

∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) = د(٣)$ ∴ د(س) متصلة عند س = ٣

ب بإعادة تعريف الدالة د(س) = $\begin{cases} ٨ - س & عندما\ س \geqslant ٣ \\ س + ٢ & عندما\ س < ٣ \end{cases}$

∵ د(٣) = ٥ ، ∵ $د(٣^+) = \underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـا} (٨ - س) = ٥$ ، $د(٣^-) = \underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـا} (س + ٢) = ٥$

∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س) = ٥$ **أي أن** $د(٣) = \underset{س \leftarrow ٣}{نهـا} د(س)$

**لذلك فإن** الدالة متصلة عند س = ٣

### حاول أن تحل

② ابحث اتصال كل من الدوال لآتية عند النقطة المبينة أمام كل منها:

أ $د(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ عند س = ١ ، س = ٢

ب $د(س) = ٣ - |س - ٢|$ عند س = ٢

## إعادة تعريف الدالة بحيث تكون متصلة

إذا كانت د(س) غير متصلة عند س = أ وكانت $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ د(س) لها وجود فأنه يمكن إعادة تعريف الدالة د حتى تصبح متصلة عند س = أ.

### مثال

③ أعد تعريف كل من الدوال الآتية إن كان ذلك ممكنًا بحيث تصبح متصلة عند س =١

أ د(س) = $\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١}$

ب د(س) = $\begin{cases} س^{٣} + ٢س ، & س > ١ \\ ٥س - ١ ، & س < ١ \end{cases}$

**الحل**

أ لكى تكون الدالة د متصلة عند س = ١ فإن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س) = د(١)

$\therefore \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{س - ١} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} (س + ٣)$

**أي أن** $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س) = ٤

لذلك يمكن إعادة تعريف د لتصبح متصلة وتكون د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١} & \text{عندما } س \neq ١ \\ ٤ & \text{عندما } س = ١ \end{cases}$

ب لكى تكون الدالة متصلة عند س = ١، لابد أن تكون د(١) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د(س)

$\therefore$ د($١^{+}$) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ($س^{٣}$ + ٢س) = ١ + ٢ × ١ = ٣ ، د($١^{-}$) = $\underset{س \leftarrow ١^{-}}{\text{نهـا}}$ (٥س -١) = ٥ - ١ = ٤

$\because$ د($١^{-}$) ≠ د($١^{+}$) لذلك فإنه لا يوجد نهاية للدالة عندماس ← ١

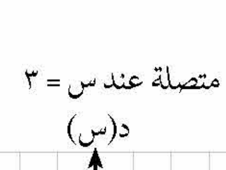
ولا يمكن إعادة تعريف الدالة بحيث تصبح متصلة عند س = ١

### حاول أن تحل

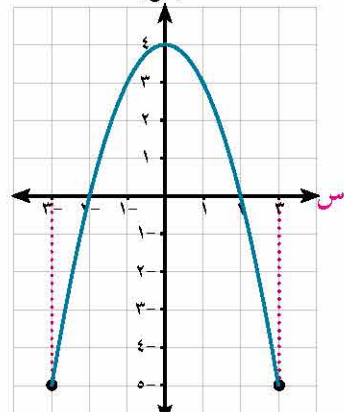
③ أعد تعريف الدالة الآتية حتى تصبح متصلة عند س = ٣ إذا كان ممكنًا حيث د(س) = $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣}$

④ بين أن د(س) = $\frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣}$ غير متصلة عند س = ٣

ثم أوجد قيمة هـ التى تجعل د(س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} + ٢س - ١٥}{س - ٣} & \text{عندما } س \neq ٣ \\ هـ + ١ & \text{عندما } س = ٣ \end{cases}$ متصلة عند س = ٣



## اتصال دالة على فترة *continuity of a Function on an Interval*




يمثل الشكل المقابل منحنى الدالة د حيث د(س) = ٤ - $س^{٢}$ فى الفترة [-٣، ٣] ولكى تكون د متصلة على الفترة [-٣، ٣] فلابد أن تكون متصلة عند جميع نقاط تلك الفترة.

**أى أن:** $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(أ) لكل أ ∈ ]-٣، ٣[

$\underset{س \leftarrow -٣^{+}}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(-٣) ، $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{\text{نهـا}}$ د(س) = د(٣)

ومما سبق يمكن التوصل إلى التعريف الآتى:

**تعريف ٢**

إذا كانت د معرفة على الفترة [أ، ب].

تكون الدالة متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

١- د(س) متصلة على الفترة ]أ، ب[

٢- $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ د(س) = د(أ) ، $\lim_{س \leftarrow ب^-}$ د(س) = د(ب)

**بالاعتماد على التعريف السابق ونهايات الدول يمكن بيان بعض الدوال المتصلة**

١- الدالة كثيرة الحدود: متصلة على ح أو على مجال تعريفها.

٢- الدالة الكسرية: متصلة على ح عدا مجموعة أصفار المقام.

٣- دالة الجيب د(س) = جا (س) وجيب التمام د(س) = جتا س: متصلة على ح

٤- دالة الظل: د(س)= ظاس متصلة على ح - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن$\pi$} ، ن ∈ ص

**مثال**

④ ابحث اتصال الدالة الآتية على الفترة [ ٠ ، ∞[

حيث د(س) = $\begin{cases} \text{جا س - جتا س} & \text{لكل } ٠ \leqslant س \leqslant \pi \\ \text{جتا ٢س} & \text{لكل } س > \pi \end{cases}$

**الحل**

د(س) = جا س - جتا س ، د(س) = جتا ٢س (على خط الأعداد: من ٠ إلى $\pi$ ثم من $\pi$ إلى ∞)

د(س) معرفة على الفترة [٠، ∞[

لكى نبحث اتصال الدالة، نبحث اتصالها على فترات مجالها الجزئية، وكذلك اتصالها عند النقاط التى يتغير عندها تعريف الدالة وأيضًا من اليمين عند الصفر.

**١)** د(س) = جا س - جتا س متصلة على الفترة ]٠، $\pi$[

كذلك د(س) = جتا ٢س متصلة على الفترة ]$\pi$، ∞[

**٢)** د(٠) = جا ٠ - جتا ٠ = - ١ ، $\lim_{س \leftarrow ٠^+}$ (جا س - جتا س) = - ١

أى أن: د(٠) = $\lim_{س \leftarrow ٠^+}$ د(س) فالدالة متصلة من جهة اليمين عند س = ٠

٣) نبحث اتصال الدالة عندما س = $\pi$

د($\pi$) = حا$\pi$ - حتا$\pi$ = ١

د($\pi^-$) = نهــا$_{س \leftarrow \pi^-}$ (جا س - جتا س) = ١ ، د($\pi^+$) = نهــا$_{س \leftarrow \pi^+}$ جتا ٢س = ١

د($\pi^-$) = د($\pi^+$) ، د($\pi$) = ١ **أي أن:** د($\pi^-$) = د($\pi^+$) = د($\pi$)

∴ متصلة عند س = $\pi$ **من (١) ، (٢) ، (٣)** الدالة متصلة على [٠ ، ∞[

**٩ حاول أن تحل**

⑤ ابحث اتصال الدالة د حيث

د(س) = { ١ + جا س ، ٠ ⩽ س < $\frac{\pi}{٢}$
{ ٢ + (س - $\frac{\pi}{٢}$)$^٢$ ، س ⩾ $\frac{\pi}{٢}$

## مثال

⑤ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على مجالها:

أ د(س) = س$^٢$ - ٣س + ٢ ب د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٤}$

ج د(س) = $\frac{جا س + جتا س}{س^٢ - ١}$ د د(س) = $\frac{ظا س}{س^٢ + ١}$

**الحل**

أ د(س) = س$^٢$ - ٣س + ٢ دالة كثيرة حدود من الدرجة الثانية فهي متصلة على ع

ب د(س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س + ٤}$ دالة كسرية مجالها = ع - {-٤} ، مجموعة أصفار المقام= { -٤}

**أي أن** الدالة متصلة على ع - { -٤}

ج د(س) = $\frac{جا س + جتا س}{س^٢ - ١}$

∵ جا س، جتا س متصلة على ع ، دالة المقام (س$^٢$ - ١) متصلة على ع ، أصفار المقام = {-١ ، ١}

∴ الدالة د متصلة على ع - {-١، ١}

د د(س) = $\frac{ظا س}{س^٢ + ٤}$

دالة البسط: ظا س متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن $\pi$، ن ∈ ص}

دالة المقام: س$^٢$ + ١ > ٠ لجميع قيم س فلا توجد أصفار للمقام.

أي أن د متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن $\pi$، ن ∈ ص}

**حاول أن تحل**

٦ ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:

أ د(س) = ٧

ب $د(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$

جـ $د(س) = \frac{س^٣ + ١}{جا س}$

د د(س) = (س + ١)جتا س

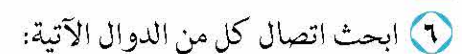
**لاحظ أن**

إذا كانت $د_١$، $د_٢$ متصلتين على ع فإن:

١- $د_١ \pm د_٢$ متصلة على ع

٢- $د_١ \times د_٢$ متصلة على ع

٣- $\frac{د_١}{د_٢}$ تكون متصلة على ع عدا مجموعة أصفار المقام.



## نشاط

٧ الربط بالكيمياء

إذا كان معدل التفاعل فى تجربة كيميائية يعطى بالدالة ر حيث $ر(س) = \frac{٠,٠٦ س}{س + ١٢}$ ، س تركيز المحلول.

ابحث فى الشبكة الدولية للمعلومات عن تجارب كيميائية يمكن تمثيلها بتلك الدالة ثم:

أ مثل الدالة بيانيًّا بأحد البرامج الرسومية. ب ابحث اتصال هذه الدالة.

## مثال

٦ بين أن الدالة د حيث $د(س) = \sqrt{س^٢ + س + ١}$ متصلة على ع

**الحل**

حيث أن $س^٢ + س + ١$ موجب لجميع قيم س ∈ ع

(المميز = $ب^٢ - ٤ أ جـ = ١ - ٤ = -٣ < صفر$)

أو $س^٢ + س + ١ = (س + \frac{١}{٢})^٢ + \frac{٣}{٤}$ مجموع مربعين

∴ $س^٢ + س + ١$ موجب لجميع قيم س ∈ ع

∴ $د(س) = (\sqrt{س^٢ + س + ١})$ معرفة لجميع قيم س ∈ ع

لكل أ ∈ المجال ع نجد أن $د(أ) = \sqrt{أ^٢ + أ + ١}$

$\lim_{س \leftarrow أ} د(س) = \lim_{س \leftarrow أ} (\sqrt{س^٢ + س + ١}) = \sqrt{أ^٢ + أ + ١}$

∴ $د(أ) = \lim_{س \leftarrow أ} د(س)$ لكل أ ∈ ع

∴ د(س) متصلة على ع

**حاول أن تحل**

٨ ابحث اتصال الدالة د حيث $د(س) = \sqrt{س - ٢}$ على مجالها.




**ادرس اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المعطاة:**

١) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ٢ &، \text{س} \leqslant ١ \\ ٣\text{س} &، \text{س} > ١ \end{cases}$ عند س = ١

٢) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ١ &، \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} - ١ &، \text{س} > ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

٣) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢ &، \text{س} \leqslant ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١ &، \text{س} > ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

٤) $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٤ &، \text{س} < -٢ \\ ١ &، -٢ \leqslant \text{س} < -١ \\ ٢\text{س} + ٣ &، \text{س} \geqslant -١ \end{cases}$ عند س = -٢، عند س = -١

٥) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - ٢)}{\text{س}^{٢} - ٤} &، \text{س} < ٢ \\ ١ - \dfrac{٣}{\text{س}^{٢}} &، \text{س} \geqslant ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

٦) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{١ - \text{جتا س}}{\text{س}} &، \text{س} > ٠ \\ ٢ \text{ جا س} &، \text{س} \leqslant ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

**ابحث اتصال كل من الدوال الآتية على ع:**

٧) $\text{د(س)} = \text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ١$

٨) $\text{د(س)} = \dfrac{-\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$

٩) $\text{د(س)} = \dfrac{٣\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}$

١٠) $\text{د(س)} = \dfrac{٢\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} - ١٥}$

١١) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}}{|\text{س}| - ٢}$

١٢) $\text{د(س)} = \dfrac{|\text{س} + ٢|}{(\text{س} + ٢)^{٢}}$

١٣) $\text{د(س)} = \text{جا س} - ٣ \text{ جتا } (\text{س} + ١)$

١٤) $\text{د(س)} = \text{س}^{٢} + \text{جتا}^{٢} \text{ س}$

١٥) $\text{د(س)} = \text{س}^{٣} \text{ جا } ٢\text{س}$

١٦) $\text{د(س)} = \text{ظا}^{٢} \text{ س} - ١$

١٧) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا س}}{\text{س}^{٢} - ٩}$

١٨) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{ظا س}}{\text{س}^{٢} - ٩}$

**ابحث اتصال كل الدوال الآتية على الفترة المعطاة:**

١٩) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س ظاس} + \text{جا}^{٢} ٣\text{س}}{٥\text{س}^{٢}} &، -\dfrac{\pi}{٤} < \text{س} < ٠ \\ ٢ \text{ جتا } ٢\text{س} &، ٠ \leqslant \text{س} < \dfrac{\pi}{٤} \end{cases}$ على الفترة $]-\dfrac{\pi}{٤} ، \dfrac{\pi}{٤}[$

٢٠) $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٦} - ١}{\text{س}^{٣} - ١} &، -٤ < \text{س} < ١ \\ ٣\text{س} - ١ &، ١ \leqslant \text{س} < ٤ \\ \text{س}^{٢} &، ٤ \leqslant \text{س} < ٦ \end{cases}$ على الفترة $]-٤ ، ٦[$

**أوجد قيم أ في كل مما يأتي إذا كان:**

٢١) $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} + \text{أس} + ٩}$ متصلة على ع

**٢٢** $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}} & \text{حيث س} \neq ٠ \\ \text{أ} & \text{عندما س} = ٠ \end{cases}$ متصلة على ع

**أوجد قيمتي الثابتين ب ، جـ في كل مما يأتي:**

**٢٣** $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ١ & ، ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} + \text{ب س} + \text{جـ} & ، \text{س} \in \text{ع} - ]١ ، ٣[ \end{cases}$ متصلة على ع

**٢٤** $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} + ٢\text{ب} & ، \text{س} < -٢ \\ ٣\text{ب س} + \text{جـ} & ، -٢ \leqslant \text{س} \leqslant ١ \\ ٣\text{س} - ٢\text{ب} & ، \text{س} > ١ \end{cases}$ متصلة على ع

**أعد تعريف كل من الدوال الآتية حتى تصبح متصلة عند النقط المبينة إذا كان ممكنًا:**

**٢٥** $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} + ١ & ، \text{س} \geqslant ٢ \\ \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & ، \text{س} < ٢ \end{cases}$ عند س = ٢

**٢٦** $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{٣\text{س} + ١ - \text{جتا س}}{٥\text{س}} & ، \text{س} > ٠ \\ \dfrac{٣}{٥} \text{ جتا س} & ، \text{س} < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

**٢٧** $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{(\text{س} - ٣)^{٥٠} + (\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} & ، \text{س} > ٣ \\ \text{جتا } (٣ - \text{س}) & ، \text{س} < ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

**٢٨** $\text{د(س)} = \dfrac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦}{\text{س} - ٣}$ عند س = ٣

**٢٩** أوجد قيمة جـ التي تجعل الدالة د متصلة عند جـ حيث: $\text{د(س)} = \begin{cases} ٢ - \text{س}^{٢} & \text{س} \geqslant \text{جـ} \\ \text{س} & \text{س} < \text{جـ} \end{cases}$

## تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

# ملخص الوحدة

**١)** مجموعة الأعداد الحقيقية الممتدة ح̄ هي ح ∪ {-∞ ، ∞}

أ) ∞ + أ = ∞ ب) -∞ + أ = -∞ ج) $\frac{أ}{∞} = \frac{أ}{-∞}$ = صفر

د) ∞ × أ = { ∞ ، إذا كان أ > ٠ ؛ -∞ ، إذا كان أ < ٠ } هـ) -∞ × أ = { -∞ ، إذا كان أ > ٠ ؛ ∞ ، إذا كان أ < ٠ }

**٢)** إذا كانت قيمة د تقترب من قيمة وحيدة ل، عندما س ⟵ أ من جهة اليمين وجهة اليسار فإن $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل وتقرأ نهاية د(س) عندما تقترب س من أ هي ل.

**٣)** وجود نهاية الدالة عندما س = أ لا تعني بالضرورة أن تكون الدالة معرفة عند س = أ، والعكس إذا كانت الدالة معرفة عند س = أ فهذا لا يعني بالضرورة وجود النهاية.

**٤)** $\lim_{س \to أ}$ ( حـ$_ن$ س$^ن$ + حـ$_{ن-١}$ س$^{ن-١}$ + ... + حـ$_٠$) = حـ$_ن$ أ$^ن$ + حـ$_{ن-١}$ أ$^{ن-١}$ + ... + جـ

**٥)** إذا كانت د(س) = ق(س) لكل س ∈ ح - {أ} وكان $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ل فإن $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل

**٦)** إذا كان $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل ، $\lim_{س \to أ}$ هـ(س) = م فإن:

أ) $\lim_{س \to أ}$ ك د(س) = ك.ل حيث ك ∈ ح

ب) $\lim_{س \to أ}$ [د(س) ± هـ(س)] = ل ± م

ج) $\lim_{س \to أ}$ د(س). هـ(س) = ل.م

د) $\lim_{س \to أ} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{ل}{م}$ بشرط م ≠ ٠

هـ) $\lim_{س \to أ}$ (د(س))$^ن$ = ل$^ن$ حيث ل$^ن$ ∈ ح

و) $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{د(س)} = \sqrt[ن]{ل}$ حيث $\sqrt[ن]{ل}$ ∈ ح

**٧)** بعض نظريات ونتائج النهايات:

أ) $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س - أ} = ن أ^{ن-١}$

ب) $\lim_{س \to أ} \frac{(س+أ)^ن - أ^ن}{س} = ن أ^{ن-١}$

ج) $\lim_{س \to أ} \frac{س^ن - أ^ن}{س^م - أ^م} = \frac{ن}{م} أ^{ن-م}$

**٨)** نهاية دالة عند اللا نهاية:

أ) $\lim_{س \to ∞} \frac{١}{س^ن} = ٠$

ب) $\lim_{س \to ∞} \frac{أ}{س^ن} = ٠$ {حيث ن ∈ ح$_+$، أ ثابت}

ج) $\lim_{س \to أ}$ جـ = جـ ، حيث جـ ثابت إذا كان ن عددًا صحيحًا موجبًا فإن $\lim_{س \to ∞}$ س$^ن$ = ∞

**٩)** عند إيجاد $\lim_{س \to ∞} \frac{د(س)}{ر(س)}$ حيث كل من د(س)، ر(س) دوال كثيرات الحدود فإن:

أ) النهاية تعطى عددًا حقيقيًّا لا يساوى الصفر إذا كانت درجة البسط = درجة المقام.

ب) النهاية تساوى صفرًا إذا كانت درجة البسط < درجة المقام.

ج) النهاية تعطى $\pm\infty$ إذا كانت درجة البسط > درجة المقام.

**١٠)** أ) $\lim_{س \to أ}$ جا س = جا أ، حيث أ ∈ ع ، $\lim_{س \to أ}$ جتا س = جتا أ حيث أ ∈ ع

ب) $\lim_{س \to أ}$ ظا س = ظا أ حيث أ عدد حقيقي ، أ $\neq \frac{\pi}{2} + ن\pi$ لكل ن ∈ ص

ج) إذا كانت س زاوية مقاسة بالتقدير الدائري فإن: $\lim_{س \to ٠} \frac{جا س}{س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا س}{س} = ١$

د) $\lim_{س \to ٠}$ جتا س = ١ ، $\lim_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س}{س} = ٠$

**١١)** يقال إن نهاية د(س) عندما س تؤول إلى أ تساوى ل إذا وفقط إذا كانت نهايتيها من اليمين ومن اليسار عندما س تؤول إلى أ متساويتين وكل منهما تساوى ل.

وتكتب رمزيًا: $\lim_{س \to أ}$ د(س) = ل إذا وفقط إذا كان: د $(أ^+)$ = د $(أ^-)$ = ل حيث:

أ) د $(أ^+) = \lim_{س \to أ^+}$ د(س) ، د $(أ^-) = \lim_{س \to أ^-}$ د(س)

**١٢)** تكون الدالة د متصلة عندما س = أ إذا تحققت الشروط الآتية معًا:

أ) $\lim_{س \to أ}$ د(س) موجودة  ب) د(أ) موجودة  ج) $\lim_{س \to أ}$ د(س) = د(أ)

**١٣)** إذا كانت د (س) معرفة على الفترة [أ، ب]. تكون الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] إذا كانت:

أ) د(س) متصلة على الفترة ]أ ، ب[

ب) $\lim_{س \to أ^+}$ د(س) = د(أ)  ج) $\lim_{س \to ب^-}$ د(س) = د(ب)

**١٤)** بعض أنماط الدوال المتصلة:

- الدالة كثيرة الحدود متصلة على ع أو على مجال تعريفها.
- الدالة الكسرية متصلة على ع ماعدا أصفار المقام
- دالة الجيب وجيب التمام متصلة على ع
- دالة الظل د(س) = ظاس متصلة على ع - {س: س = $\frac{\pi}{2}$ + ن$\pi$، ن ∈ ص}

## معلومات إثرائية

قم بزيارة المواقع الآتية:








## اختبار تراكمى

**أكمل كلًّا مما يأتي:**

(١) $\text{س}^{٢} - \text{س} - ٦ = (\text{س} - ......)(\text{س} + ......)$

(٢) $\left(\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} - \text{س}\right)\left(\sqrt{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}} + \text{س}\right) = ......$

(٣) $\frac{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٤}{\text{س} - ١} = ......$

(٤) $\frac{\text{جتا}\,\pi}{\pi} = ......$

(٥) $\frac{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٤}}{\frac{\pi}{٢}} = ......$

(٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \frac{٣\text{س} - ٢}{\text{س}} = ......$

(٧) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س}}{٢\text{س}} = ......$

(٨) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}\,٢\text{س}}{٥\text{س}} = ......$

(٩) $\underset{\text{س} \leftarrow \infty}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٥}{٤ - ٣\text{س}^{٢}} = ......$

(١٠) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}\,٢\text{س}}{\text{س}^{٢}} = ......$

**احسب النهايات الآتية (إن وجدت):**

(١١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{٢\,\text{جا}\,٤\text{س}}{\text{جا}\,٣\text{س}}$

(١٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٩} - ١}{١ - \text{س}^{٥}}$

(١٣) $\underset{\text{س} \leftarrow -٣}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩}$

(١٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \frac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - \text{س} + ٢}$

(١٥) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نها}} \text{د(س)}$ حيث $\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} + \text{س}}{|\text{س} + ١|}$

(١٦) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نها}} \text{د(س)}$ حيث $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{ظتا}\,\text{س}}{\pi - ٢\text{س}} & \text{لكل س} < \frac{\pi}{٢} \\ \text{جا}\,(\pi - \text{س}) & \text{لكل س} > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

**ابحث اتصال كل من الدوال الآتية:**

(١٧) $\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢} & \text{لكل س} \neq ٢ \\ \text{جا}\,(\pi - \text{س}) & \text{لكل س} = ٢ \end{cases}$

أ) عند $\text{س} = ٢$  ب) على ع

(١٨) $\text{د(س)} = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}$ على ع

(١٩) إذا كان $\text{د(س)} = \begin{cases} \text{س} - ٢ & \text{س} < ٠ \\ \text{س}^{٢} & ٠ \leqslant \text{س} \leqslant ٢ \\ ٢\text{س} & \text{س} > ٢ \end{cases}$ فأوجد

أ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نها}} \text{د(س)}$  ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \text{د(س)}$  ج) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نها}} \text{د(س)}$

(٢٠) أوجد قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نها}} \text{د(س)}$ لها وجود حيث $\text{د(س)} = \left(\frac{١}{\text{س} - ١} - \frac{\text{أ}}{\text{س}^{٢} - ١}\right)$

**أوجد النهايات الآتية:**

(٢١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣س + ٥}{٦س - ٨}$

(٢٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{٤س^٢ + س}{٢س^٣ - ٥}$

(٢٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{٥س^٣ - ٢س^٢ + ١}{١ - ٣س}$

(٢٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^٢ + ٢}}{٣س - ٦}$

(٢٥) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{٥ س^٣ + ٥س^٢} - س^٣)$

(٢٦) $\lim_{س \to \infty} (\sqrt{س^٢ - ٣س} - س)$

(٢٧) ابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند النقط المبينة:

أ) $د(س) = \begin{cases} ٢س + ٣ & س \leqslant ٤ \\ ٧ + \frac{١٦}{س} & س > ٤ \end{cases}$ عند س = ٤

ب) $د(س) = \begin{cases} \frac{١ - جاس}{س} & س > ٠ \\ \frac{جاس}{س} & س < ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

(٢٨) إذا كانت $د(س) = \begin{cases} -١ & س \neq ٤ \\ ١ & س = ٤ \end{cases}$ ، $ر(س) = \begin{cases} ٤س - ١٠ & س \neq ٤ \\ -٦ & س = ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال كل من الدوال الآتية عند س = ٤

أ) د(س)  ب) ر(س)  ج) د(س). ر(س)

د) |د(س)|  هـ) ر(س) - ٦د(س)  و) ر(د(س))

(٢٩) أوجد قيم ك التى تجعل الدالة متصلة على ع

أ) $د(س) = \begin{cases} ٧س - ٢ & س \leqslant ١ \\ - ك س^٢ & س \geqslant ١ \end{cases}$

ب) $د(س) = \begin{cases} ك س^٢ & س \leqslant ٢ \\ ٢س + ك & س > ٢ \end{cases}$

ج) $د(س) = \begin{cases} ٩ - س^٢ & س \geqslant -٣ \\ \frac{ك}{س^٢} & س < -٢ \end{cases}$

(٣٠) أوجد قيمة ك، م التى تجعل الدالة الآتية متصلة على ع

$د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٥ & س \geqslant ٢ \\ م(س + ١) + ك & ٢ > س > -١ \\ ٢س^٣ + س + ٧ & س \leqslant -١ \end{cases}$

(٣١) ادرس اتصال الدالة د:

أ) $د(س) = \frac{١}{\sqrt{س - ٢}}$ على مجالها

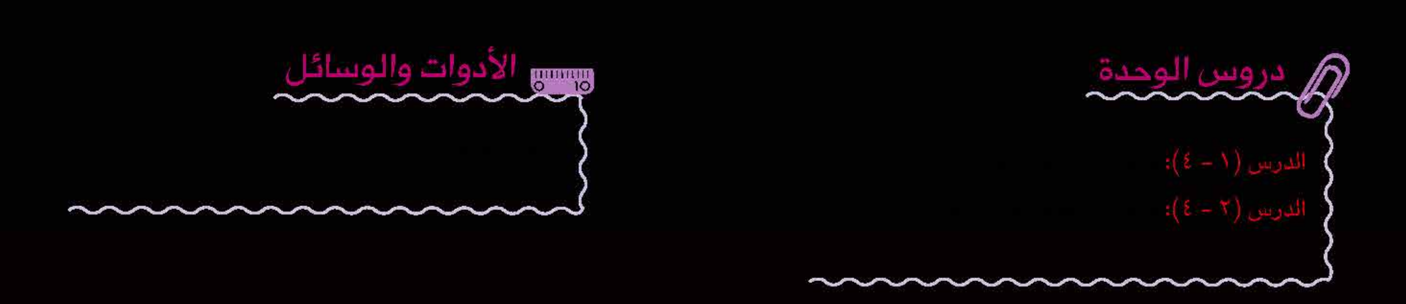
ب) $د(س) = \frac{س - ٢}{|س| - ٢}$ على ع




## مقدمة الوحدة

## مخرجات تعلم الوحدة

## المصطلحات الأساسية



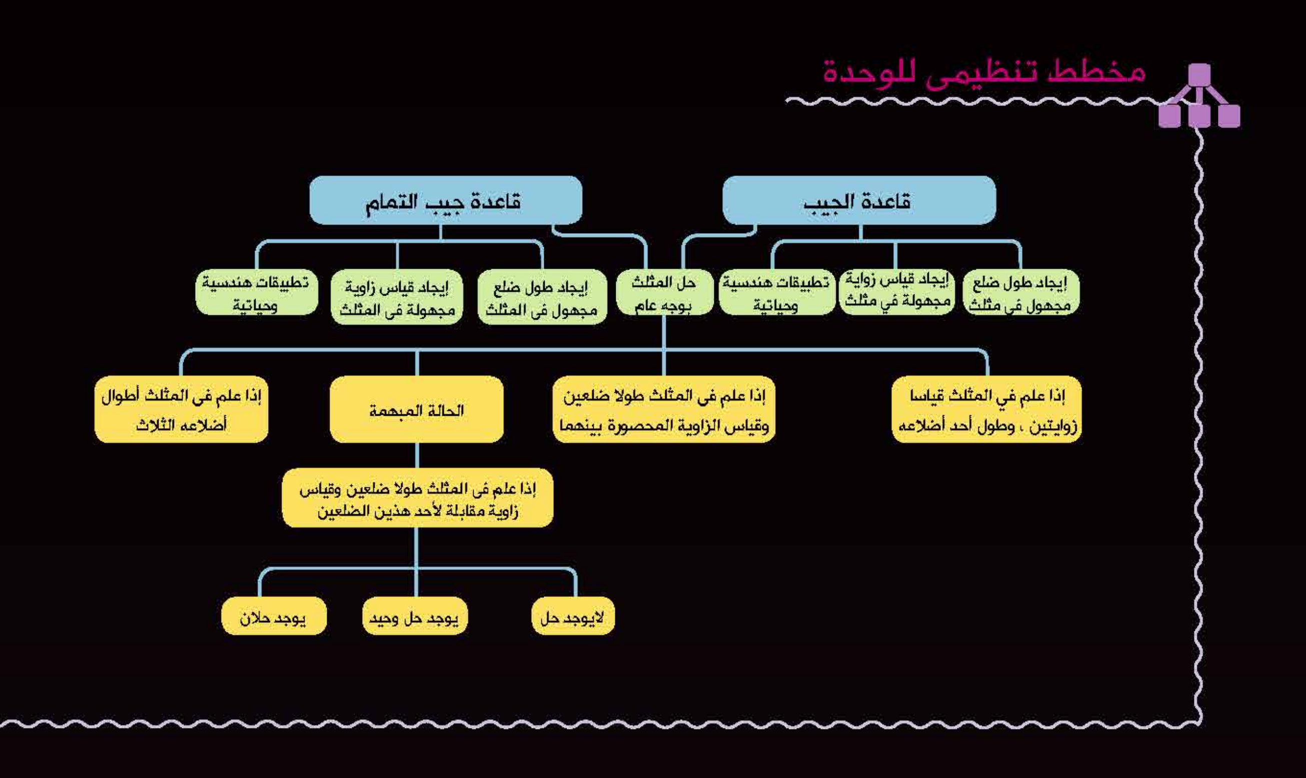
## دروس الوحدة

الدرس (١ - ٤):

الدرس (٢ - ٤):

## الأدوات والوسائل

## مخطط تنظيمى للوحدة





# ٤ - ١ قانون (قاعدة) الجيب

*The Sine Rule*

سبق أن تعلمت إيجاد طول أحد أضلاع المثلث القائم الزاوية بمعلومية طولي ضلعين فيه أو طول أحد أضلاعه وقياس إحدى زاويتيه الحادتين والآن سوف نتعلم طرقًا آخرى لإيجاد أطوال أضلاع وقياسات زوايا المثلث بوجه عام.

## نشاط

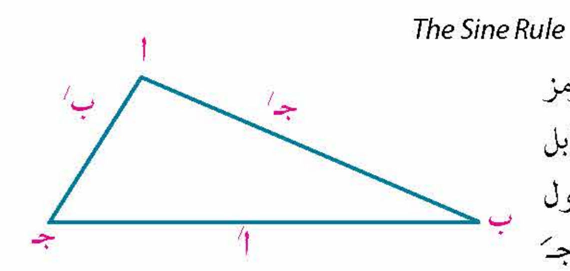
أراد كريم إيجاد المسافة بين الفيوم والإسماعيلية باستخدام البيانات المتوفرة على الخريطة الموضحة في الشكل المقابل.

قم بعمل قياس للرسم ثم قس المسافة بين الفيوم والإسماعيلية (المقياس هو ١ سم لكل ٤٣ كم) تأكد من صحة قياساتك بعد دراستك لطرق حل المثلث غير قائم الزاوية، وإحدى هذه الطرق هو قانون (قاعدة ) الجيب.




## تعلم

### قانون (قاعدة) الجيب *The Sine Rule*




في المثلث أ ب جـ إذا استخدمنا الرمز أَ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية أ، والرمز بَ للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية ب ، والرمز جـَ للدلالة على طول الضلع المقابل للزاوية جـ ، فإنه يمكن استخدام قانون مساحة سطح المثلث لاستنتاج قانون الجيب الذي يبين العلاقة بين أطوال أضلاع المثلث وجيوب الزوايا المقابلة له.

**أي أن:** $\frac{1}{2}$ بَ جـَ جا أ = $\frac{1}{2}$ أَ جـَ جا ب = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا جـ

صيغ مساحات المثلث المتساوية



**تذكر أن**

مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولي أى ضلعين × جيب الزاوية بينهما

**سوف تتعلم**

- قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) الجيب فى حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية باستخدام قاعدة الجيب
- العلاقة بين قانون (قاعدة) الجيب لأى مثلث وطول نصف قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث وحل مسائل عليها.

**المصطلحات الأساسية**

- حساب المثلثات Trigonometry
- قاعدة الجيب Sine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle
- حالة مبهمة The Ambiguous Case

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية

بَ جَ جا أ = أَ جَ جا ب = أَ بَ جا جـ    بضرب كل عبارة في ٢

$$\frac{\text{بَ جَ جا أ}}{\text{أَ بَ جَ}} = \frac{\text{أَ جَ جا ب}}{\text{أَ بَ جَ}} = \frac{\text{أَ بَ جا جـ}}{\text{أَ بَ جَ}}$$ بقسمة كل عبارة على أَ بَ جَ

$$\frac{\text{جا أ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{جا جـ}}{\text{جَ}}$$ بالتبسيط

$$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$$ من خواص التناسب

> تذكر أن
>
> مساحة المثلث أ ب جـ
> $= \frac{1}{2}$ أَ بَ جا جـ
> $= \frac{1}{2}$ أَ جَ جا ب
> $= \frac{1}{2}$ بَ جَ جا أ

**أى أن:** في أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها وتعرف هذه العلاقة بقاعدة الجيب أي : $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$

تعلم ذاتي: هل يمكنك إثبات قانون الجيب بطرق أخرى؟ وضح ذلك

## استخدام قانون (قاعدة ) الجيب في إيجاد طول ضلع في المثلث

### مثال

(١) أوجد طول أكبر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٥٤° ٣٣َ، ق(∠ب) = ٤٩° ٢٢َ، أَ = ١٢٤,٥سم

**الحل**



> تذكر أن
>
> في أى مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا، ويكون الضلع الأصغر طولًا مقابلًا للزاوية الأصغر قياسًا.

أكبر ضلع في المثلث هو الضلع المقابل لأكبر زاوية    (التباين في المثلث)

ق(∠جـ) = ١٨٠° - [ق(∠أ) + ق(∠ب)]

= ١٨٠° - [٤٥° ٣٣َ + ٤٩° ٢٢َ] = ٧٦° ٥َ

∴ أكبر طول ضلع هو جَ لأنه يقابل أكبر زاوية فى المثلث وهى زاوية جـ

∴ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا جـ}}$    ∴ $\frac{١٢٤,٥}{\text{جا } ٥٤° ٣٣'} = \frac{\text{جَ}}{\text{جا } ٧٦° ٥'}$

∴ جَ = $\frac{١٢٤,٥ \text{ جا } ٧٦° ٥'}{\text{جا } ٥٤° ٣٣'}$ = ١٤٨,٤سم

**حاول أن تحل**

(١) أوجد طول أصغر ضلع فى المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠أ) = ٤٣°، ق(∠ب) = ٦٥°، جَ = ٨,٤سم

## حل المثلث باستخدام قانون الجيب *Solving the triangle using the sine rule*

المقصود بحل المثلث هو إيجاد قياسات عناصره المجهولة باستخدام القياسات المعطاة بشرط أن يكون من بينها طول أحد أضلاع المثلث على الأقل.

**أولًا: حل المثلث بمعلومية طول أحد أضلاعه وقياسي زاويتين:**

### مثال

(٢) حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٨سم، ق(∠أ) = ٣٦°، ق(∠ب) = ٤٨°

**الحل**

$ق(\angle جـ) = ١٨٠° - (٣٦° + ٤٨°) = ٩٦°$

$\because \frac{جا أ}{أَ} = \frac{جا ب}{بَ}$ $\quad \therefore \frac{جا ٣٦°}{٨} = \frac{جا ٤٨°}{بَ}$

$\therefore بَ = \frac{٨ جا ٤٨°}{جا ٣٦°} \simeq ١٠,١١٤$سم.

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة، تأكد أولًا من تهيئة الحاسبة لاستخدام التقدير الستيني لقياسات الزوايا ثم اضغط المفاتيح من اليسار إلى اليمين:

ابدأ ← ( 8 □ SIN 4 8 ) ÷ SIN 3 6 =

$\because \frac{جا أ}{أَ} = \frac{جا جـ}{جـَ}$ $\quad \therefore \frac{جا ٣٦°}{٨} = \frac{جا ٩٦°}{جـَ}$ $\quad \therefore جـَ = \frac{٨ جا ٩٦°}{جا ٣٦°} \simeq ١٣,٥٣٥$سم

وذلك باستخدام الآلة الحاسبة كالآتي:

إبدأ ← ( 8 □ SIN 9 6 ) ÷ SIN 3 6 =

**حاول أن تحل**

(٢) حل المثلث أ ب جـ حيث أَ = ٨سم ، $ق(\angle أ) = ٦٠°$ ، $ق(\angle ب) = ٤٠°$

**ثانيًا: حل المثلث بمعلومية طولى ضلعين فيه وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما (يوجد حلين لزاوية مجهولة)**

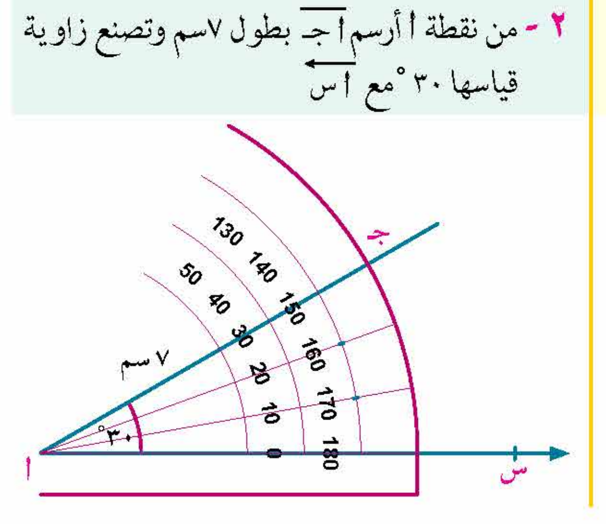
**الحالة المبهمة** *Ambiguous Case*

ارسم المثلث أ ب جـ (إن أمكن ذلك ) حسب القياسات الموجودة في الجدول المقابل:

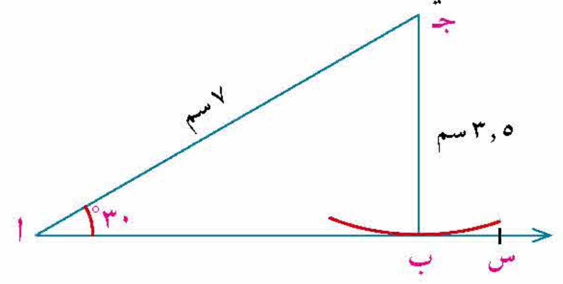
| طول $\overline{أجـ}$ بالسم | ق(∠أ) | طول $\overline{بجـ}$ بالسم |
|---|---|---|
| ٧ | ٣٠° | ٣,٥ |
| | | ٥ |
| | | ٢ |

**١ -** من نقطة أ أرسم $\overrightarrow{أس}$

**٢ -** من نقطة أ أرسم $\overline{أجـ}$ بطول ٧سم وتصنع زاوية قياسها ٣٠° مع $\overrightarrow{أس}$

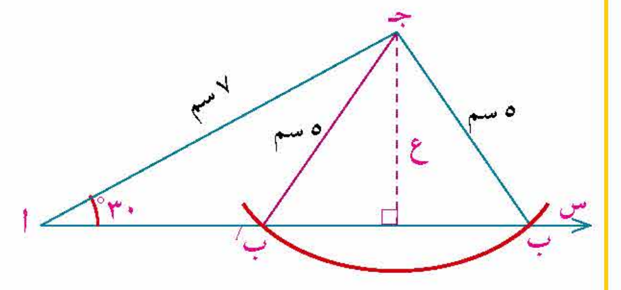


**٣ -** عندما يكون ب جـ = ٣,٥سم أركز سن الفرجار عند النقطة جـ وبفتحة طولها ٣,٥ سم ارسم قوسًا يمس $\overleftarrow{\text{أ س}}$ في نقطة ب.




➤ قس طول $\overline{\text{جـ ب}}$ وقارن طوله مع طول العمود المرسوم من جـ على $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ماذا تلاحظ؟

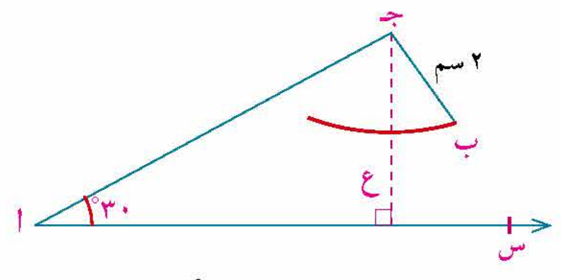
**٤ -** عندما يكون ب جـ = ٥ سم كرر الخطوة (٣) واجعل طول فتحة الفرجار ٥سم وارسم قوسًا يقطع $\overleftarrow{\text{أ س}}$. **ماذا تلاحظ؟**




➤ قس طول $\overline{\text{جـ ب}}$ ، طول $\overline{\text{جـ بَ}}$ **ماذا تلاحظ؟**

➤ قارن بين طول $\overline{\text{ب جـ}}$ وطول العمود المرسوم من نقطة جـ على $\overleftarrow{\text{أ س}}$ **ماذا تلاحظ؟**

**٥ -** عندما يكون ب جـ = ٢سم كرر الخطوة (٣) واجعل طول فتحة الفرجار ٢سم وارسم قوسًا ، هل يقطع هذا القوس $\overleftarrow{\text{أ س}}$؟

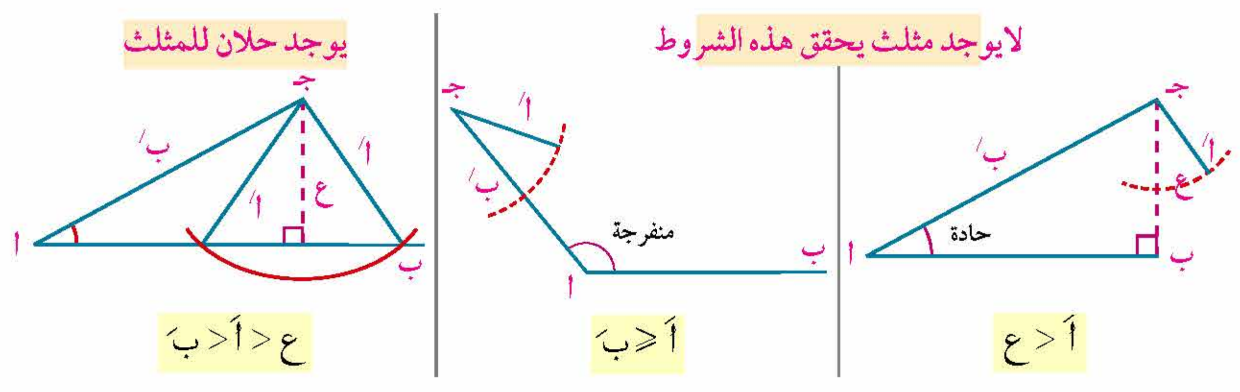



➤ قارن بين طول $\overline{\text{ب جـ}}$ وطول العمود المرسوم من جـ على $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ماذا تلاحظ؟

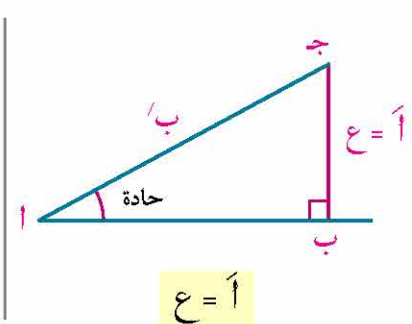
**تدريب :**

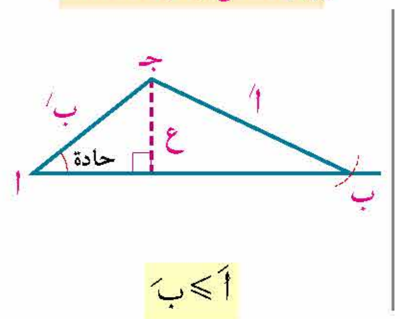
➤ أعد الخطوات السابقة في حالة ما تكون ∠ جـ منفرجة وبين الحالات المختلفة لرسم المثلث.

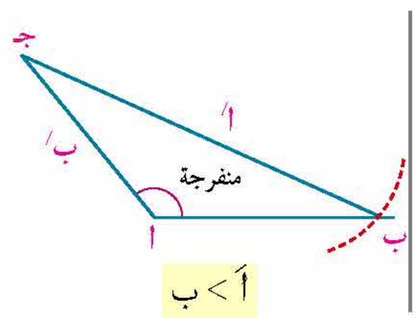
➤ من الخطوات السابقة يمكن استنتاج الحالات المختلفة لحل المثلث أ ب جـ بمعلومية ∠أ ، أَ ، بَ باعتبار أن ع هو أقصر بعد من جـ إلى $\overline{\text{أ ب}}$



**يوجد حل وحيد للمثلث**




## مثال

**تطبيق**

(٣) بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الأطلاق.

أ) △ أ ب جـ الذي فيه ق(∠ب) = ١١٠° ، بَ = ٨سم ، جـَ = ٥سم

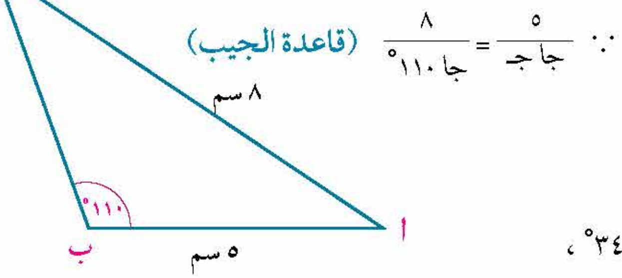
ب) △ ى هـ و الذي فيه ق(∠ى) = ٦٠° ، ىَ = ٧سم ، هـَ = ٩سم

جـ) △ ل م ن الذي فيه ق(∠ل) = ٤٠° ، لَ = ١٢سم ، مَ = ١٥سم

**الحل**

أ) ∵ ∠ب منفرجة ، بَ > جـَ

∴ يوجد للمثلث حل وحيد ∵ $\frac{٥}{\text{جا جـ}} = \frac{٨}{\text{جا } ١١٠°}$ **(قاعدة الجيب)**




∴ جا جـ = $\frac{٥ \times \text{جا } ١١٠°}{٨}$ ≃ ٠,٥٨٧٣

ومنها ق(∠جـ) ≃ ٣٦°

∴ ق(∠أ) ≃ ١٨٠° - (١١٠° + ٣٦°) ≃ ٣٤° ،

∵ $\frac{\text{أَ}}{\text{جا } ٣٤°} \simeq \frac{٨}{\text{جا } ١١٠°}$ ∴ أَ ≃ $\frac{٨ \times \text{جا } ٣٤°}{\text{جا } ١١٠°}$ ≃ ٤,٨ سم

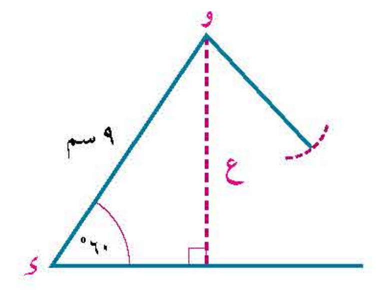
**أى أن:** ق(∠أ) ≃ ٣٤° ، ق(∠جـ) ≃ ٣٦° ، أَ ≃ ٤,٨ سم

ب) ∵ ∠ى حادة ، ىَ > هـَ

ع = هـَ جا ى = ٩ جا ٦٠ ≃ ٧,٨سم

∵ ىَ > ع (حيث ٧ > ٧,٨)

**فلا يوجد حل للمثلث**

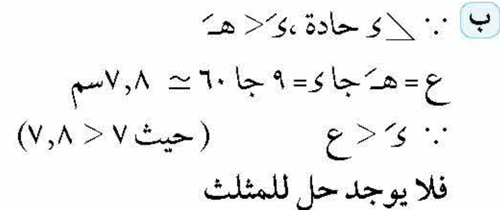



جـ) ∵ ∠ل حادة ، لَ > مَ (حيث ١٢ > ١٥)،

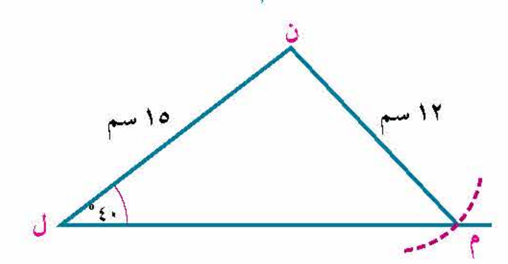
ع = ١٥ جا ٤٠ ≃ ٩,٦ سم

∵ ع > لَ > مَ (حيث ٩,٦ > ١٢ > ١٥)

لذلك يوجد للمثلث ل م ن حلان.



**الحل الأول:** ∠م حادة




∵ $\frac{١٥}{جا م} = \frac{١٢}{جا ٤٠°}$

∴ جا م = $\frac{١٥ \times جا ٤٠°}{١٢}$   جا م ≃ ٠,٨٠٣٥

∴ ق(∠م) ≃ ٥٣,٤٦°

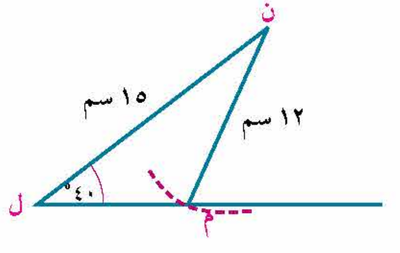
∴ ق(∠ن) ≃ ١٨٠° - (٤٠° + ٥٣,٤٦°)

≃ ٨٦,٥٤° ،

∵ $\frac{نَ}{جا ٨٦,٥٤°} \simeq \frac{١٢}{جا ٤٠°}$

∴ نَ ≃ $\frac{١٢ \times جا ٨٦,٥٤°}{جا ٨٦,٥٤°}$ ≃ ١٨,٦٣ سم

**الحل الثانى:** ∠م منفرجة




∵ دالة الجيب موجبة في الربع الثانى ،

جا م ≃ ٠,٨٠٣٥

∴ ق(∠م) ≃ ١٨٠° - ٥٣,٤٦° ≃ ١٢٦,٥٤° ،

ق(∠ن) ≃ ١٨٠° - (٤٠° + ١٢٦,٥٤°)

≃ ١٣,٤٦°

∵ $\frac{نَ}{جا ١٣,٤٦°} = \frac{١٢}{جا ٤٠°}$

∴ نَ ≃ $\frac{١٢ \times جا ١٣,٤٦°}{جا ٤٠°}$ ≃ ٤,٣٥ سم

**أى أن:** أحد الحلين هو: ق(∠م) ≃ ٥٣,٤٦° ، ق(∠ن) ≃ ٨٦,٥٤° ، نَ ≃ ١٨,٦٣ سم

**الحل الآخر هو:** ق(∠م) ≃ ١٢٦,٥٤° ، ق(∠ن) ≃ ١٣,٤٦° ، نَ ≃ ٤,٣٥ سم

**حاول أن تحل**

(٣) بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لاتحقق وجود أى مثلث على الاطلاق.

أ) △ أ ب جـ الذي فيه ق(∠أ) = ١٠٠° ، أَ = ١٢ سم ، بَ = ١٥ سم

ب) △ ءهـ و الذي فيه ق(∠هـ) = ٣٥° ، هـَ = ٩ سم ، وَ = ٥ سم

جـ) △ م ن ل الذي فيه ق(∠م) = ٥٢° ، مَ = ٢١ سم ، نَ = ٢٦ سم

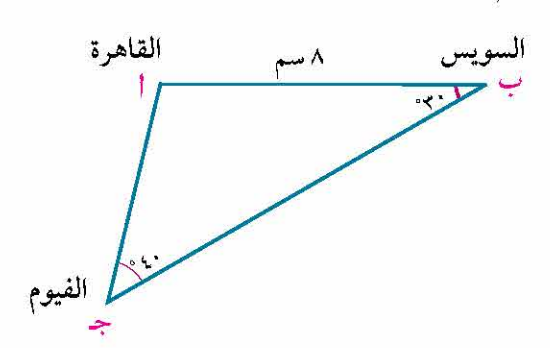
**مثال**

(٤) **الربط بالجغرافيا:** الشكل المجاور يمثل ثلاثة مواقع لمدن مصرية تكون مثلثًا إذا كانت المسافة على الخريطة بين السويس والقاهرة ٨سم وقياس الزاوية عند الفيوم ٤٠° فأوجد لأقرب كيلو متر:

أ) المسافة بين القاهرة والفيوم.

ب) المسافة بين السويس والفيوم.

علمًا بأن كل اسم على الرسم يمثل ١٦,٧٥ كم




**الحل**

ق(∠أ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٤٠°) = ١١٠°

∵ $\frac{أ جـ}{جا ٣٠°} = \frac{ب جـ}{جا ١١٠°} = \frac{٨}{جا ٤٠°}$

∴ أ جـ = $\frac{٨ \times جا ٣٠°}{جا ٤٠°}$ ≃ ٦,٢٢سم

∴ المسافة بين القاهرة والفيوم ≃ ٦,٢٢ × ١٦,٧٥ ≃ ١٠٤ كم        ب جـ = $\frac{٨ \times جا ١١٠°}{جا ٤٠°}$ ≃ ١١,٧سم

∴ المسافة بين السويس والفيوم ≃ ١١,٧ × ١٦,٧٥ ≃ ١٩٦ كم

**حاول أن تحل**

**٤** في النشاط صفحة (١٥٤):

**أ** استخدم الأدوات الهندسية لإيجاد قياسات زوايا المثلث والمسافة بين الفيوم والإسكندرية.

**ب** أوجد باستخدام قاعدة الجيب المسافة الحقيقية بين:

**أولًا:** الإسماعيلية والفيوم.        **ثانيًا:** الإسماعيلية والإسكندرية.

## تطبيقات هندسية لقانون الجيب *Geometrical Applications on the Sine Rule*

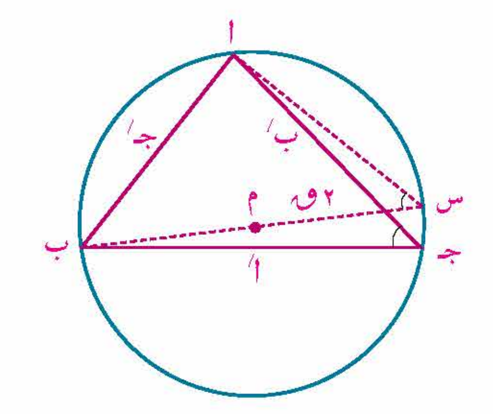
**تمرين مشهور**

**فى أى مثلث أ ب جـ يكون:** $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ} = ٢نق$

**حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ**

**البرهان:-**

**إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث حاد الزوايا**




نرسم الدائرة التى تمر برؤوس المثلث أ ب جـ الحاد الزوايا ثم نرسم القطر $\overline{ب س}$ والوتر $\overline{س أ}$

∵ ق(∠ ب أ س) = ٩٠°        ،   ق(∠ أ س ب) = ق(∠ أ جـ ب)

∴ جا س = $\frac{أ ب}{ب س}$        ،   جا جـ = $\frac{أ ب}{ب س}$

فيكون أ ب = ب س جا جـ

∴ جـَ = ٢نق جا جـ        **أى أن:** $\frac{جـَ}{جا جـ} = ٢نق$

**بطريقة مماثلة يمكن إثبات أن:** $\frac{أَ}{جا أ} = ٢نق$   ،   $\frac{بَ}{جا ب} = ٢نق$

∴ $\frac{أَ}{جا أ} = \frac{بَ}{جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ} = ٢نق$

**تعلم ذاتي:** أثبت القانون السابق إذا كانت الدائرة تمر برؤوس مثلث منفرج الزاوية.

**مثال**

**٥** مثلث ل م ن فيه مَ = ٦٨,٤سم ، ق(∠ م) = ١٠٠° ، ق(∠ ن) = ٤٠° أوجد:

**أ** لَ        **ب** طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ل م ن

جـ) مساحة سطح المثلث ل م ن

**الحل**

ق(∠ ل) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

$\frac{\text{ل}'}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{\text{٦٨,٤}}{\text{جا ١٠٠°}}$ **(قانون الجيب)**

ل َ = $\frac{\text{٦٨,٤}}{\text{جا ١٠٠°}}$ × جا ٤٠° ≃ ٤٤,٦٤سم **وهو المطلوب (١)**

∵ $\frac{\text{م}'}{\text{جا م}}$ = ٢نق ∴ $\frac{\text{٦٨,٤}}{\text{جا ١٠٠°}}$ = ٢نق

**أى أن** نق = $\frac{\text{٦٨,٤}}{\text{٢ جا ١٠٠°}}$ ≃ ٣٤,٧٢ سم **وهو المطلوب (٢)**

مساحة المثلث ل م ن = $\frac{1}{2}$ م َ ل َ جا ن = $\frac{1}{2}$ × ٦٨,٤ × ٤٤,٦٤ جا ٤٠° = ٩٨١,١ سم$^2$

**حاول أن تحل**

٥) أ ب جـ مثلث فيه أ َ = ٢٥سم ، ق(∠ ب) = ٣٥ َ ٦٨° ،
ق(∠ جـ) = ٤٢ َ ١٠٣° أوجد مساحته، وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه

**مثال**

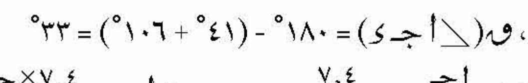
٦) أ ب جـ ى شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ ى}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ى = ٧,٤سم ، ق(∠ ب) = ٦٢° ، ق(∠ ى) = ١٠٦°،
ق(∠ أ جـ ب) = ٤١°. أوجد

**أولًا:** طول كل من $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$ **ثانيًا:** مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ى لأقرب سنتيمتر مربع.

**الحل**

فى المثلث أ جـ ى

∵ ق(∠ ى أ جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = ٤١° **(بالتبادل)**


، ق(∠ أ جـ ى) = ١٨٠° - (٤١° + ١٠٦°) = ٣٣°

∵ $\frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ١٠٦°}} = \frac{\text{٧,٤}}{\text{جا ٣٣°}}$ ∴ أ جـ = $\frac{\text{٧,٤ × جا ١٠٦°}}{\text{جا ٣٣°}}$ = ١٣,٠٦سم

في المثلث أ ب جـ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° - (٦٢° + ٤١°) = ٧٧°

∵ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٧٧°}} = \frac{\text{١٣,٠٦}}{\text{جا ٦٢°}}$ ∴ ب جـ = $\frac{\text{١٣,٠٦ × جا ٧٧°}}{\text{جا ٦٢°}}$ = ١٤,٤١سم

مساحة سطح شبه المنحرف أ ب جـ ى = $\frac{1}{2}$ أ جـ × ب جـ جا ٤١° + $\frac{1}{2}$ أ جـ × أ ى جا ٤١°

= $\frac{1}{2}$ × ١٣,٠٦ × (٧,٠٤ + ١٤,٤١) × جا ٤١° ≃ ٩٣سم$^2$

**حاول أن تحل**

٦) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه جـ ى = ١٠٠سم ، ق(∠ ب جـ أ) = ٣٦° ، ق(∠ ب ى أ) = ٥٥° ،
ق(∠ ب جـ ى) = ٨٥° ، ق(∠ جـ ى أ) = ٨٧° ، أوجد طول كل من $\overline{\text{ب ى}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.




**أكمل كل مما يأتي:**

(١) فى أى مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع ..................

(٢) فى المثلث أ ب جـ إذا كان ٢ جا أ = ٣ جا ب = ٤ جا جـ فإن أَ : بَ : جـَ = ..........

(٣) أ ب جـ مثلث متساوى الأضلاع، طول ضلعه ١٠ $\sqrt{٣}$ سم، فإن طول قطر الدائرة الخارجة لهذا المثلث = ....

(٤) مثلث أ ب جـ فيه ق(∠ أ) = ٦٠°، ق(∠ جـ) = ٤٠° ، جـَ = ٨,٤سم فإن أَ = ........ سم

(٥) في المثلث أ ب جـ يكون $\frac{٢ بَ}{جا ب}$ =.....نق

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:-**

(٦) طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ الذى فيه ق(∠ أ) = ٣٠° ، أَ = ١٠سم هو:.......

أ) ١٠ سم ب) ٢٠سم جـ) ٥سم د) ٤٠سم

(٧) إذا كان طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ يساوى ٤سم ، ق(∠ أ) = ٣٠° فإن أَ هو:

أ) ٤سم ب) ٢سم جـ) ٤ $\sqrt{٣}$ د) $\frac{١}{١٦}$

(٨) فى المثلث أ ب جـ يكون المقدار ٢ نق جا أ مساويًا:

أ) أَ ب) بَ جـ) حـَ د) مـ(△أ ب جـ)

(٩) إذا كان نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث س ص ع فإن $\frac{صَ}{٢ جا ص}$ يساوى:

أ) نق ب) ٢نق جـ) $\frac{١}{٢}$ نق د) ٤نق

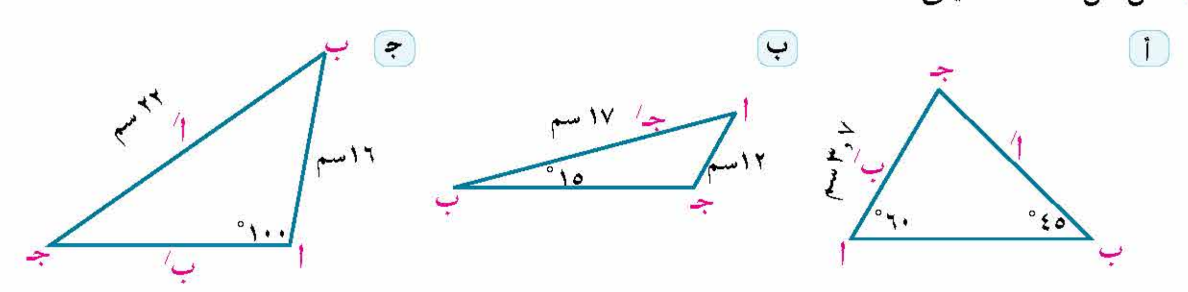
(١٠) △ل م ن فيه، ق(∠ ل) = ٣٠° ، م ن = ٧سم فإن طول قطر الدائرة المارة برؤوسه تساوى:

أ) ٧ سم ب) ٣,٥ سم جـ) ١٤سم د) $\frac{١٤}{\sqrt{٣}}$

(١١) فى المثلث س ص ع إذا كان ٣ جا س = ٤ جا ص = ٢ جا ع فإن سَ: صَ: عَ تساوى:

أ) ٢: ٣: ٤ ب) ٦: ٤: ٣ جـ) ٣: ٤: ٦ د) ٤: ٣: ٦

(١٢) **حل كل مثلث مما يلى:**




(١٣) بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو اكثر من مثلث أو لا تحقق وجود أى مثلث على الاطلاق.

أ) ق(∠ أ) = ١٠٥°، أَ = ٨سم ، بَ = ٥سم

ب) ق(∠ أ) = ٤٧°، أَ = ٤سم، بَ = ٦ سم

جـ) ق(∠ أ) = ٣٨°، أَ = ١٠سم، بَ = ١٤ سم

د) ق(∠ أ) = ٣٦,٨٧°، أَ = ٩سم،بَ = ١٠ سم

(١٤) حل المثلث أ ب جـ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة.

أ) ق(∠أ) = ٤٠°، ق(∠ب) = ٣٠°، بَ = ١٠سم ب) ق(∠أ) = ٥٠°، أَ = ٤سم، بَ = ٣ سم

جـ) ق(∠ب) = ٣٣°، بَ = ٧سم، جـَ = ١٠ سم د) ق(∠جـ) = ١١٦°، جـَ = ١٢سم، أَ = ١٠ سم

(١٥) حل المثلث أ ب جـ في كل مما يأتي:

أ) ق(∠أ) = ٣٢°، أَ = ١٧سم، بَ = ١١سم ب) ق(∠أ) = ٤٩°، أَ = ٣٢سم، بَ = ٣٨سم

جـ) ق(∠ب) = ٧٠°، بَ = ١٤سم، جـَ = ١٤سم د) ق(∠جـ) = ١٠٣°، بَ = ٤٦سم، جـَ = ٦١سم

(١٦) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، أثبت أن: أَ : بَ : جـَ = $\sqrt{٦}$ : ٢ : $\sqrt{٣}$ + ١

(١٧) أ ب جـ ء متوازى أضلاع فيه أ ب = ١٩,٧٧سم وقطراه $\overline{أ جـ}$، $\overline{ب ء}$ يصنعان مع ضلعه $\overline{أ ب}$ زاويتين مقدارهما ٢٢َ ٣٦°، ٥٨َ ٤٤°، أوجد طولى القطرين.

(١٨) أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨,٣٥٦سم، ق(∠أ) = ٢٠َ ٤١°، ق(∠ب) = ١٧َ ٥٩° أوجد:

أ) بَ ب) طول العمود النازل من جـ على $\overline{أ ب}$

(١٩) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$، أ ء = ١٠,٧سم، ق(∠ء) = ١٠٠°، ق(∠ب) = ١٩َ ٦١°، ق(∠جـ أ ء) = ٥٠َ ٣٣°، أوجد طول كل من $\overline{أ جـ}$، $\overline{ب جـ}$

(٢٠) أ ب جـ ء شكل رباعي فيه ق(∠ب جـ ء) = ٨٥°، ق(∠جـ ء أ) = ٨٧°، ق(∠ب جـ أ) = ٣٦°، ق(∠ب ء أ) = ٥٥°
جـ ء = ١٠٠٠ متر أوجد طول كل من $\overline{ب ء}$، $\overline{أ جـ}$ لأقرب متر.

(٢١) أ ب جـ مثلث فيه جا جـ = ٠,٣٥، جـَ = ١٤سم، أوجد بدلالة $\pi$ مساحة الدائرة المارة برؤوس المثلث من الخارج.

(٢٢) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥٨، ق(∠ب) = ٣٨°، (∠جـ) = ٦٢° أوجد طول العمود النازل من أ على أَ.

(٢٣) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = ٦٠°، ق(∠ب) = ٤٥°، فإذا كان أَ + بَ = ($\sqrt{٦}$ + ٢) سم فأوجد كل من أَ، بَ

(٢٤) أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة طول قطرها ٢٠سم، إذا كان ق(∠أ) = ٤٢°، ق(∠ب) = ٤٨َ ٧٤°، أوجد أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ

(٢٥) أ ب جـ مثلث فيه جـَ = ١٩سم، ق(∠أ) = ١١٢°، ق(∠ب) = ٣٣°، أوجد لأقرب رقمين عشريين كل من بَ، طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث.

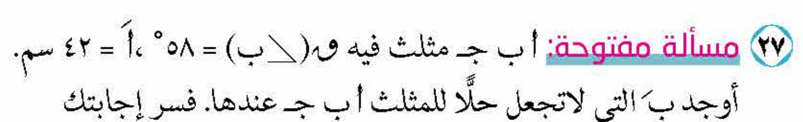
(٢٦) الربط بالجغرافيا: **الشكل المقابل يمثل مواقع ثلاث مدن أ، ب، جـ**
**أوجد لأقرب كيلو متر:**



أ) المسافة بين أ، جـ ب) المسافة بين ب، جـ



(٢٧) مسألة مفتوحة: أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ب) = ٥٨°، أَ = ٤٢ سم.
أوجد بَ التي لاتجعل حلًّا للمثلث أ ب جـ عندها. فسر إجابتك



(٢٨) تفكير ابداعي:

أ) في المثلث أ ب جـ أثبت أن: $\frac{٣أَ - ٤بَ}{٣جا أ - ٤جا ب} = \frac{جـَ}{جا جـ}$

ب) إذا كانت مـ هى مساحة سطح المثلث أ ب جـ أثبت أن مـ = أَ² $\left(\frac{جا ب جا جـ}{٢ جا أ}\right)$

# ٤ - ٢ قانون (قاعدة) جيب التمام

*The Cosine Rule*

**سوف تتعلم**

- قانون (قاعدة) جيب التمام لأي مثلث.
- استخدام قانون (قاعدة) جيب التمام في حل المثلث.
- نمذجة وحل مشكلات رياضية وحياتية باستخدام قاعدة جيب التمام.



**المصطلحات الأساسية**

- قاعدة جيب التمام Cosine Rule
- زاوية حادة Acute Angle
- زاوية منفرجة Obtuse Angle
- زاوية قائمة Right Angle

**الأدوات المستخدمة**

- آلة حاسبة علمية Scientific Calculator

## فكر و ناقش




تحركت سفينتان أ ، ب في نفس اللحظة من أحد الموانئ، فإذا تحركت أ في اتجاه ٢٠° جنوب الشرق حيث قطعت مسافة ٢٤ كم وتحركت ب في اتجاه ٥٥° شمال الشرق حيث قطعت مسافة ١٠ كم في نفس الزمن.

أوجد المسافة بين السفينتين في نهاية هذا الزمن.

استخدم القياسات الهندسية بمقياس رسم مناسب وذلك لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ .

هل يمكنك استخدام قانون الجيب لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ ؟

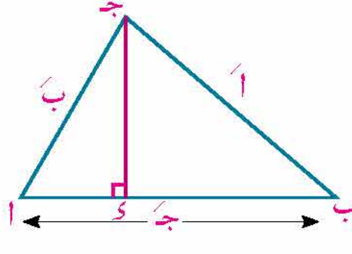
هل يمكنك استنتاج قانون آخر لإيجاد طول $\overline{\text{أ ب}}$ بمعلومية طول كل من $\overline{\text{و أ}}$ ، $\overline{\text{و ب}}$ وقياس الزاوية المحصورة بينهما؟ فسر إجابتك.

## تعلم

### قانون (قاعدة) جيب التمام *The Cosine Rule*

في $\triangle$ ب ى جـ القائم الزاوية في ى:

$(\text{ب جـ})^2 = (\text{جـ ى})^2 + (\text{ب ى})^2$ **(نظرية فيثاغورث)**




**أى أن:**

$\text{أ}'^2 = (\text{ب}' \text{ جا أ})^2 + (\text{جـ}' - \text{ب}' \text{ جتا أ})^2$

$= \text{ب}'^2 \text{ جا}^2 \text{ أ} + \text{ب}'^2 \text{ جتا}^2 \text{ أ} + \text{جـ}'^2 - ٢ \text{ ب}' \text{ جـ}' \text{ جتا أ}$ **(بفك الأقواس)**

$= \text{ب}'^2 (\text{جا}^2 \text{ أ} + \text{جتا}^2 \text{ أ}) + \text{جـ}'^2 - ٢ \text{ ب}' \text{ جـ}' \text{ جتا أ}$ **(بأخذ $\text{ب}'^2$ عامل مشترك)**

$= \text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - ٢ \text{ ب}' \text{ جـ}' \text{ جتا أ}$ **(بالتبسيط)**

**ومن ذلك يكون:**

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}'^2 + \text{جـ}'^2 - \text{أ}'^2}{٢ \text{ ب}' \text{ جـ}'}$$

**تذكر أن**

متطابقة فيثاغورث

$\text{جا}^2 \text{ أ} + \text{جتا}^2 \text{ أ} = ١$

**تعلم ذاتي:** أثبت نفس القانون السابق إذا كانت ∠ أ منفرجة في △ أ ب جـ.

**تعبير شفهي:** اكتب بطريقة مماثلة قيمة كل من بَ$^{٢}$ ،جـَ$^{٢}$ ، جتا ب ، جتا جـ

**تفكير ناقد:** هل القانون السابق صحيح إذا كان △ أ ب جـ قائم الزاوية في أ؟ فسر إجابتك.



**ارشاد**

يفضل عند كتابة القوانين الخاصة بجيب تمام الزاوية أن تؤخذ أضلاع المثلث أَ ، بَ ، حـَ في ترتيب دوري واحد، حتى إذا عرفت إحدى الصور أمكن استنتاج الصور الأخرى.

**ينص قانون (قاعدة) جيب التمام على أنه:**

في أي مثلث أ ب حـ يكون:

أَ$^{٢}$ = بَ$^{٢}$ + حـَ$^{٢}$ - ٢بَ حـَ جتا أ    ومنه    جتا أ = $\frac{\text{بَ}^{٢}+\text{حـَ}^{٢}-\text{أَ}^{٢}}{\text{٢بَ حـَ}}$

بَ$^{٢}$ = حـَ$^{٢}$ + أَ$^{٢}$ - ٢ حـَ أَ جتا ب    ومنه    جتا ب = $\frac{\text{حـَ}^{٢}+\text{أَ}^{٢}-\text{بَ}^{٢}}{\text{٢حـَ أَ}}$

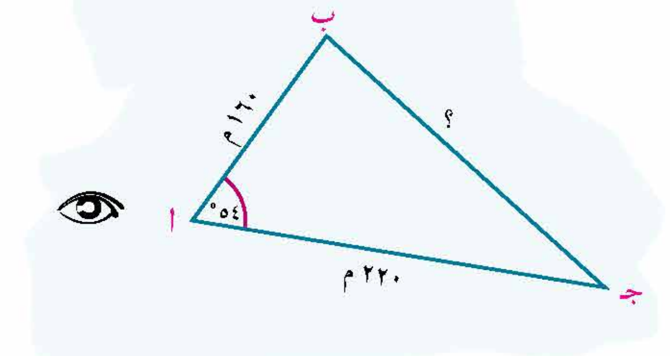
حـَ$^{٢}$ = أَ$^{٢}$ + بَ$^{٢}$ - ٢أَ بَ جتا حـ    ومنه    جتا حـ = $\frac{\text{أَ}^{٢}+\text{بَ}^{٢}-\text{حـَ}^{٢}}{\text{٢أَ بَ}}$

## نشاط

أ) استخدام الآلة الحاسبة في **إيجاد طول ضلع مجهول في مثلث باستخدام قاعدة جيب التمام.**

أراد أحد المهندسين أن يجد المسافة بين موقعين يصعب الوصول إليهما باستخدام جهاز قياس المسافات ووجد أن بعده عن النقطة الأولى (أ) يساوي ١٦٠ مترًا وبعده عن النقطة الثانية (جـ) يساوي ٢٢٠ مترًا، وق (∠ ب أ جـ) = ٥٤°.

**استخدم هذه البيانات لحساب المسافة بين النقطتين لأقرب كيلو متر.**




١ - حدد بدقة البيانات التى رصدها المهندس باستخدام جهاز قياسات المسافات.

٢ - حدد المطلوب.

٣ - مثل البيانات المطلوبة بمقياس رسم مناسب مستخدمًا الأدوات الهندسية اللازمة..

٤ - قس بالسنتيمترات طول $\overline{\text{ب جـ}}$.

٥ - أوجد الطول الحقيقى للمسافة بين ب، جـ بالكيلو مترات.

٦ - هل يمكنك استخدام قاعدة جيب التمام لإيجاد المسافة بين نقطتى ب ، جـ؟ وضح ذلك.

٧ - قارن بين النتيجة التي حصلت عليها في إيجاد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ باستخدام القياسات الهندسية وبين استخدامك لقاعدة جيب التمام.

**تذكر أن**

الطول الحقيقي = الطول في الرسم ÷ مقياس الرسم

**من النشاط السابق نجد أن:**

١ - مقياس الرسم المناسب هو: ١ سم لكل ٢٠ كيلو مترًا

٢ - باستخدام القياس: طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ٩ سم في الرسم

٣ - طول $\overline{\text{ب جـ}}$ الحقيقي ≃ ٩ × ٢٠ ≃ ١٨٠ كم

٤ - قاعدة جيب التمام هى: أَ$^{٢}$ = بَ$^{٢}$ + حـَ$^{٢}$ - ٢ بَ حـَ جتا أ

**بالتعويض:** أَ$^{٢}$ = (١٦٠)$^{٢}$ + (٢٢٠)$^{٢}$ - ٢ × ١٦٠ × ٢٢٠ جتا ٥٤° ≃ ٣٢٦١٩,٩

**فتكون:** أ ≃ ١٨٠,٦ كم.

٥ - النتائج تكون أدق عندما يكون الرسم دقيقًا ولكن يفضل استخدام القوانين لإعطاء نتائج صحيحة تمامًا.

٦ - **استخدام الآلة الحاسبة** العلمية في إيجاد الناتج:

ابدأ ↓

1 6 0 $\chi^2$ + 2 2 0 $\chi^2$ − 2 × 1 6 0 ×

2 2 0 × Cos 5 4 ) = √ =

**تطبيق على النشاط:** أوجد طول الضلع الثالث مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين فى △ أ ب جـ الذي فيه:

أ) أَ = ٤,٣٦سم ، بَ = ٣,٨٤سم ، ق (∠ جـ) = ١٠١°

ب) بَ = ٢سم ، حـَ = ٥سم ، ق (∠ أ) = ٦٠°

## إيجاد قياس زاوية في المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة:

### مثال

(١) أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٤,٦ ، بَ = ٣,٢ ، حـَ = ٢,٨

**الحل**

∵ أكبر زاوية فى القياس تقابل أكبر أضلاع المثلث طولًا ∴ ∠ أ أكبر زوايا المثلث قياسًا

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{٢\,\text{بَ حـَ}} = \frac{(٣,٢)^{٢} + (٢,٨)^{٢} - (٤,٦)^{٢}}{٢ \times ٣,٢ \times ٢,٨}$$

**باستخدام الآلة الحاسبة**

ابدأ ↓

3.2 $\chi^2$ + 2.8 $\chi^2$ − 4.6 $\chi^2$ = ÷ ( 2 × 3.2 × 2.8 )

= Shift Cos = °′″

وحيث إن جيب التمام سالب، فالزاوية أ منفرجة

∴ ق (∠ أ) = ٩٩° ٥٣′ ٤٩″

### حاول أن تحل

(١) أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ١١سم ، بَ = ١٠سم ، حـَ = ٨سم

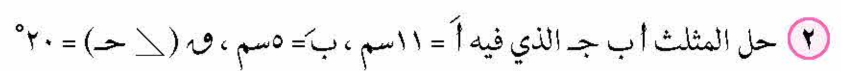
## استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث:

يسمح لنا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

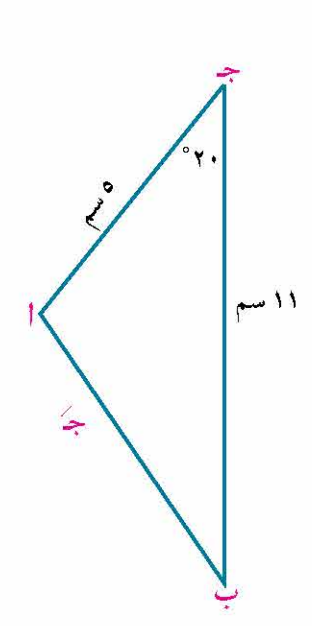
**أولًا: حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما:**

*Solving the Triangle Given the Lengths of Two Sides and the Measure of the Angle Included*

### مثال



٢ حل المثلث أ ب جـ الذي فيه أَ = ١١سم ، بَ= ٥سم ، ق (∠ حـ) = ٢٠°




**الحل**

يجب إيجاد حـَ ، ق (∠ أ) ، ق (∠ ب)

∵ حـَ$^{٢}$ = أَ$^{٢}$ + بَ$^{٢}$ - ٢ أَ بَ جتا حـ (قانون جيب التمام)

= (١١)$^{٢}$ + (٥)$^{٢}$ - ٢ × ١١ × ٥ جتا ٢٠°

حـَ = $\sqrt{(١١)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ × ١١ × ٥ \text{ جتا } ٢٠°}$ ≃ ٦,٥٢٩ سم

جتا أ = $\frac{بَ^{٢} + حـَ^{٢} - أَ^{٢}}{٢ بَ حـَ}$ = $\frac{(٥)^{٢} + (٦,٥٢٩)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ (٥) (٦,٥٢٩)}$ ≃ -٠,٨١٧

ق (∠ أ) = ١٤٤° ٤٦َ

ق (∠ ب) = ١٨٠° - [ق (∠ أ) + ق (∠ حـ)]

= ١٨٠° - [١٤٤,٧٨٦° + ٢٠°] = ١٥,٢١٤°

**لاحظ أن:** في **المثال السابق** عند إيجاد قياس زاوية في مثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما يفضل استخدام قانون جيب التمام بدلًا من استخدام قانون الجيب وذلك لأنه:

**١- في حالة استخدام قانون الجيب:**

- فإن جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجب.

**٢- في حالة استخدام قانون جيب التمام فإنه:**

- إذا كانت الزاوية منفرجة يكون جيب تمامها سالبًا.
- و إذا كانت الزاوية حادة يكون جيب تمامها موجبًا.
- يسمح أيضًا قانون جيب التمام بحل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة، علمًا بأن مجموع طولي أي ضلعين منهما أكبر من طول الضلع الثالث.




يمكنك استخدام قانون الجيب أيضًا لحساب ق (∠ أ) ، ق (∠ ب) بعد إيجاد حـَ، ولكن الفائدة التي تعود من استخدام قانون جيب التمام هو التمييز بين الزوايا الحادة والمنفرجة.

### حاول أن تحل

٢ حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٢٤,٦سم ، حـَ= ١٤,٢سم، ق (∠ ب) = ١٨° ٤٢َ

## ثانيًا: حل المثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة:

### مثال

(٣) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٩سم ، بَ = ٧سم ، حـَ = ٥سم.

**الحل**

المطلوب هو إيجاد قياسات الزوايا أ ، ب ، حـ

$\because$ جتا أ $= \frac{\text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{أَ}^{٢}}{\text{٢ بَ حـَ}} = \frac{٧^{٢} + ٥^{٢} - ٩^{٢}}{٢ \times ٧ \times ٥} = -٠{,}١$

ق$(\angle$ أ$) \simeq ٩٥° ٤٤َ ٢١ً$

جتا ب $= \frac{\text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{\text{٢ حـَ أَ}} = \frac{٥^{٢} + ٩^{٢} - ٧^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٩} \simeq ٠{,}٦٣٣$

ق$(\angle$ ب$) \simeq ٥٠° ٤٢َ ١٣ً$

ق$(\angle$ حـ$) = ١٨٠° - [$ق$(\angle$ أ$) +$ ق$(\angle$ ب$)] = ٣٣° ٣٣َ ٢٦ً$

**حاول أن تحل**

(٣) حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ١٢,٢سم ، بَ = ١٨,٤سم ، حـَ = ٢١,١سم

> يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا إلى الحالة المبهمة والتي سبق دراستها في قانون الجيب، ولإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة الناتجة والمثال التالي يستخدم هذا المدخل.

### مثال — حل المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس زاوية:

حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٦سم ، بَ = ٧سم ، ق$(\angle$ أ$) = ٣٠°$

**الحل**

المطلوب إيجاد حـَ ، ق$(\angle$ ب$)$ ، ق$(\angle$ حـ$)$

$\because$ $\text{أَ}^{٢} = \text{بَ}^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - \text{٢ بَ حـَ}$ جتا أ **(قانون جيب التمام)**

$٦^{٢} = ٧^{٢} + \text{حـَ}^{٢} - ٢ \times ٧$ حـَ جتا $٣٠°$

$٠ = \text{حـَ}^{٢} - ٧\sqrt{٣}\,\text{حـَ} + ١٣$ أي $\text{حـَ}^{٢} - ٧\sqrt{٣}\,\text{حـَ} + ١٣ = ٠$

$\therefore$ حـَ $= \frac{١}{٢}\left(٧\sqrt{٣} \pm \sqrt{(-٧\sqrt{٣})^{٢} - ٤ \times ١ \times ١٣}\right)$ **(القانون العام لحل المعادلة التربيعية)**

$\therefore$ حـَ $= ١٠{,}٩٣٥$ أو $١{,}١٨٨$

كل قيمة موجبة لـ حـَ تقابل مثلثًا واحدًا، ولذلك لدينا مثلثان ولإيجاد جتا ب فإنه:

جتا ب $= \frac{\text{حـَ}^{٢} + \text{أَ}^{٢} - \text{بَ}^{٢}}{\text{٢ حـَ أَ}}$

**عندما حـ/ = ١٠,٩٣٥**

$$\text{جتا ب}_1 = \frac{(١٠,٩٣٥)^2 + (٦)^2 - (٧)^2}{٢ (١٠,٩٣٥) (٦)}$$

جتا ب١ = ٠,٨١٢

ق (∠ ب١) = ٣٥,٦٨٥°

≃ ٣٥° ٤١′ ٦″

ق (∠ حـ١) = ١٨٠° - [ق (∠ أ) + ق (∠ ب١)]

≃ ١١٤,٣١٤°

≃ ١١٤° ١٨′ ٥٠″

**عندما حـ/ = ١,١٨٨**

$$\text{جتا ب}_2 = \frac{(١,١٨٨)^2 + (٦)^2 - (٧)^2}{٢ (١,١٨٨) (٦)}$$

جتا ب٢ = - ٠,٨١٢

ق (∠ ب٢) = ١٤٤,٣١٤°

≃ ١٤٤° ١٨′ ٥٠″

ق (∠ حـ٢) = ١٨٠° - [ق (∠ أ) + ق (∠ ب٢)]

≃ ٥,٦٨٥°

≃ ٥° ٤١′ ٦″

تفسير: في أحد المثلثين حـَ = ١٠,٩٤، ق (∠ ب) = ٣٥° ٤١′ ٦″ ، ق (∠ حـ) = ١١٤° ١٨′ ٥٠″، وفي المثلث الآخر حـَ = ١,١٩ ، ق (∠ ب) = ١٤٤° ١٨′ ٥٠″ ، ق (∠ حـ) = ٥° ٤١′ ٦″. قارن هذه النتائج مع النتائج التي حصلنا عليها في المثال رقم (٣) من الدرس الأول (صـ١٥٨) الذي يحل المثلث نفسه بمعلومية قانون الجيب.

**حاول أن تحل**

- حل المثلث أ ب حـ الذي فيه أَ = ٨,٦سم ، بَ = ١١,١سم ، ق (∠ أ) = ٦٣°

## تطبيقات هندسية على قانون (قاعدة) جيب التمام *Geometric Applications on the Cosine Rule*

**مثال**

- أ ب حـ مثلث فيه أَ = ٦٣سم ، بَ - حـَ = ٢٧ سم، ومحيط المثلث يساوي ١٤٠ سم، أوجد كلًّا من بَ ، حـَ وقياس أصغر زوايا المثلث، ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

**الحل**

∵ أَ + بَ + حـَ = ١٤٠ (محيط المثلث) ، أَ = ٦٣

∴ بَ + حـَ = ١٤٠ - ٦٣ أي بَ + حـَ = ٧٧ (١)

∵ بَ - حـَ = ٢٧ (معطى) (٢)

من (١) ، (٢) بالجمع ينتج أن:

٢ بَ = ١٠٤ أي أن بَ = ٥٢ سم

بالتعويض في ١ ينتج أن حـَ = ٢٥سم

ونلاحظ أن حـَ هو أصغر أضلاع المثلث أ ب حـ

∴ ∠ حـ هي أصغر زوايا المثلث أ ب حـ

$$\therefore \text{جتا حـ} = \frac{\text{أَ}^2 + \text{بَ}^2 - \text{حـَ}^2}{٢\text{أَ بَ}} = \frac{(٦٣)^2 + (٥٢)^2 - (٢٥)^2}{٢ \times ٦٣ \times ٥٢} = ٠,٩٢٣٠٧٦٩$$

∴ ق (∠ حـ) = ٢٢° ٣٧′

مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ أَ بَ جا حـ

$= \frac{1}{2} \times ٦٣ \times ٥٢ \times$ جا $٢٢َ ٣٧°$ $\simeq ٦٣٠$ سم$^2$

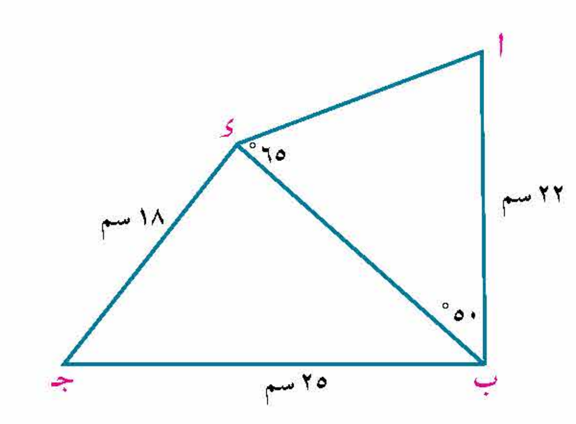
**حاول أن تحل**

٣ $\triangle$ أ ب حـ فيه بَ = ٤سم، أَ + حـَ = ١١سم، أَ - حـَ = ١سم، أثبت أن ق (∠ أ) = ٢ق (∠ ب)، ثم أوجد محيط المثلث أ ب حـ ومساحة سطحه لأقرب سنتيمتر مربع.

**مثال**

٣ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٢٢سم، ق (∠ أ ء ب) = ٦٥°، ق (∠ ء ب أ) = ٥٠°، ب حـ = ٢٥سم، ء حـ = ١٨سم، أوجد: ق (∠ حـ ب ء)، ق (∠ ب حـ ء)

**الحل**




في $\triangle$ أ ب ء

ق (∠ أ) $= ١٨٠° - (٥٠° + ٦٥°)$

$= ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°$

$\because$ ق (∠ أ) = ق (∠ ء) $= ٦٥°$

$\therefore$ أ ب = ب ء = ٢٢سم

في $\triangle$ ء ب حـ

جتا(∠ ء ب حـ) $= \frac{(ب ء)^2 + (ب حـ)^2 - (ء حـ)^2}{٢ (ب ء)(ب حـ)}$

$= \frac{(٢٢)^2 + (٢٥)^2 - (١٨)^2}{٢ \times ٢٢ \times ٢٥} \simeq ٠,٧١٣٧$

$\therefore$ ق (∠ ء ب حـ) $\simeq ٤٤َ ٢٨َ ٦°$

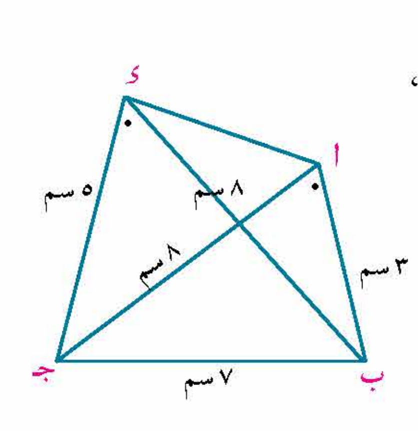
جتا(∠ ب حـ ء) $= \frac{(ب حـ)^2 + (حـ ء)^2 - (ب ء)^2}{٢ (ب حـ)(حـ ء)} = \frac{(٢٥)^2 + (١٨)^2 - (٢٢)^2}{٢ \times ٢٥ \times ١٨} \simeq ٠,٥١٦٧$

$\therefore$ ق (∠ ب حـ ء) $\simeq ٥٨َ ٥َ ٢٨°$

**حاول أن تحل**

٣ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه ق (∠ ء أ ب) = ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠°، ب ء = ١٠سم، أ ء = ٨سم، ق (∠ ء حـ ب) = ٣٠°، أوجد أ حـ لأقرب سنتيمتر.

**مثال**




٤ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٣سم، أ حـ = ٨سم، ب حـ = ٧سم، حـ ء = ٥سم، ب ء = ٨سم، أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

الحل

في △ أ ب حـ

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{ب}^2 + \text{حـ}^2 - \text{أ}^2}{2\,\text{ب حـ}} = \frac{(٨)^2 + (٣)^2 - (٧)^2}{٢ \times ٨ \times ٣} = \frac{١}{٢}$$

∴ ق (∠ أ) = ٦٠° (١)

في △ ب ء حـ

$$\text{جتا ء} = \frac{(\text{حـ ء})^2 + (\text{ء ب})^2 - (\text{ب حـ})^2}{2\,(\text{حـ ء})\,(\text{ء ب})} = \frac{(٥)^2 + (٨)^2 - (٧)^2}{٢ \times ٥ \times ٨} = \frac{١}{٢}$$

∴ ق (∠ ء) = ٦٠° (٢)

∵ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ ب ء حـ) وهما مرسومتان على $\overline{\text{ب جـ}}$ وفي جهة واحدة منها فيكون الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري. (وهو المطلوب).

حاول أن تحل

٤ أ ب حـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٩سم، ب حـ = ٥سم، حـ ء = ٨سم، ء أ = ٩سم، أ حـ = ١١سم. أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

## تمـــارين ٤ – ٢

أكمل كلًّا مما يأتى:

١ يستخدم ............ لحل المثلث بمعلومية طولى ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

٢ يستخدم ............ لحل المثلث بمعلومية قياسى زاويتين وطول ضلع فيه

٣ فى أى مثلث ل م ن يكون: ل$^2$ = م$^2$ + ن$^2$ - ............، جتا ل = $\frac{\text{م}^2 + \text{ن}^2 - \text{.......}}{\text{.........}}$

٤ في المثلث أ ب جـ، أطوال أضلاعه ١٣، ١٧، ١٥ من السنتيمترات فإن قياس أكبر زواياه يساوي ............°

٥ مثلث س ص ع أطوال أضلاعه ٧,٥سم، ٧,٤سم، ٤,٣سم فإن قياس أصغر زواياه يساوي ............°

٦ △ س ص ع فيه سَ = ١٠ سم، صَ = ٦سم، ق (∠ ع) = ٦٠° فإن عَ = ............

٧ فى △ ل ك م يكون كَ$^2$ + مَ$^2$ - لَ$^2$ = ............

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

٨ قياس أكبر زاوية فى المثلث الذى أطوال أضلاعه ٣، ٥، ٧ هى:

أ ١٥٠° ب ١٢٠° جـ ٦٠° د ٣٠°

٩ فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{\text{لَ}^2 + \text{مَ}^2 - \text{نَ}^2}{٢\,\text{لَ مَ}}$ مساويًا:

أ جتا ل ب جتا م جـ جتا ن د لا شئ مما سبق

(١٠) في المثلث س ص ع يكون ص َ$^{٢}$ + ع َ$^{٢}$ - س َ$^{٢}$ = ٢ ص َ ع َ × .....

(أ) جتا س (ب) جا ع (ج) جتا ع (د) جا س

(١١) في المثلث أ ب جـ ، أ َ: ب َ: جـ َ = ٣: ٢: ٢ فإن جتا أ تساوى

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) - $\frac{١}{٨}$ (ج) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

**أجب عن الاسئلة الآتيه:**

(١٢) بين ما إذا كانت الشروط الآتية تحقق وجود مثلث وحيد أو أكثر من مثلث أو لاتحقق وجود أى مثلث على الاطلاق.

(أ) أ َ = ٤سم، جـ َ = ١٦سم، ق(∠ جـ) = ١١٥° (ب) أ َ = ١٢ سم، جـ َ = ٧سم، ق(∠ أ) = ٢٧°

(ج) أ َ = ٥سم، جـ َ = ١٢سم، ق(∠ أ) = ٦٥° (د) أ َ = ١٤ سم، ب َ = ١٨سم، ق(∠أ) = ٤٢°

(١٣) فى المثلث أ ب جـ إذا كان:

(أ) أ َ = ٥سم ، ب َ = ٧سم ، جـ َ = ٨سم **فأثبت أن** ق(∠ ب) = ٦٠°

(ب) أ َ = ٣سم ، ب َ = ٥سم ، جـ َ = ٧سم **فأثبت أن** ق(∠ جـ) = ١٢٠°

(ج) أ َ = ١٣سم ، ب َ = ٧سم ، جـ َ = ١٣سم **فأوجد** ق(∠ جـ)

(د) أ َ = ١٣سم ، ب َ = ٨سم ، جـ َ = ٧سم **فأوجد** ق(∠ أ)

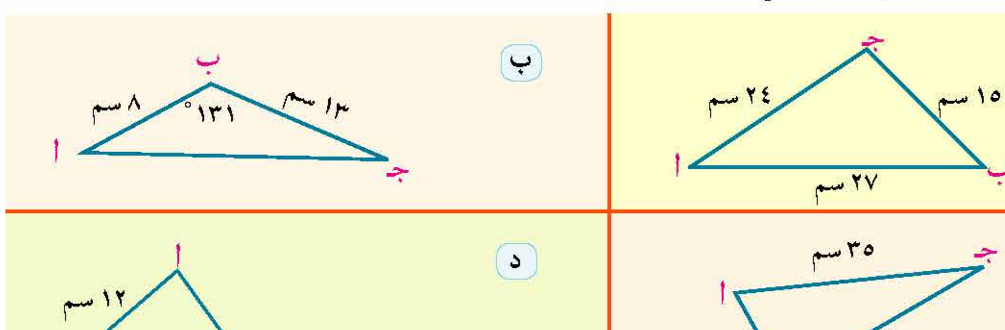
(هـ) أ َ = ١٠سم ، ب َ = ١٧سم ، جـ َ = ٢١سم **فأوجد** قياس أصغر زاوية فى المثلث

(و) أ َ = ٥سم ، ب َ = ٦سم ، جـ َ = ٧سم **فأوجد** قياس أكبر زاوية فى المثلث

(ز) أ َ = ١٧سم ، ب َ = ١١سم ، ق(∠ جـ) = ٤٢° **فأوجد** جـ َ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

(ح) ب َ = ١٦ ، جـ َ = ١٤ ، ق(∠ أ) = ٧٢° **فأوجد** أ َ مقربًا لأقرب رقمين عشريين

(١٤) في التمارين من ( أ إلى د ) حل المثلث أ ب جـ:



١٥ في التمارين من ( أ إلى هـ ) هل يمكن تكوين مثلث أ ب جـ؟ إذا كان ممكنًا حل هذا المثلث:

أ ق(∠أ) = ٥٥°، بَ = ١٢سم، جـَ = ٧سم

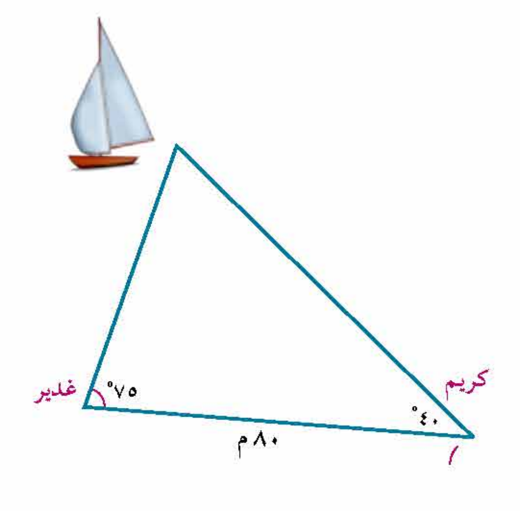
ب أَ = ٣,٢سم، بَ = ٧,٦٣سم، جـَ = ٦,٤سم

جـ أَ = ١٢سم، بَ = ٢١سم، ق(∠جـ) = ٩٥°

د أَ = ١سم، بَ = ٥سم، جـَ = ٤سم

هـ ق(∠أ) = ٤٢°، أَ = ٧سم، بَ = ١٠سم

**تطبيقات هندسية:**




١٦ متوازى أضلاع طولا ضلعيه المتجاورين ١٨سم، ٢٦سم، وقياس الزاوية بينهما ٣٩°، أوجد طول أصغر قطر له مقربًا لأقرب رقمين عشريين.

١٧ أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٩سم، ب جـ = ٥سم، جـ ى = ٨سم، أ ى = ٩سم، أ جـ = ١١ سم، أثبت أن الشكل أ ب جـ ى رباعى دائرى.

١٨ أ ب جـ ى متوازى أضلاع فيه أ ب = ٩سم، ب جـ = ١٣سم، أ جـ = ٢٠ سم، أوجد طول $\overline{\text{ب ى}}$

١٩ أ ب جـ مثلث محيطه ٧٠سم، أَ = ٢٦سم، ق(∠أ) = ٦٠°، أوجد مساحة سطحه.

٢٠ الربط بالملاحة البحرية: يقف كريم وغدير على جانبي نهر كم يبعد كريم عن القارب؟ قرب إجابتك لأقرب متر.

٢١ الربط بالزراعة: يريد مزارع وضع سياج بقطعة أرض مثلثة الشكل طول ضلعيها ٩٨م، ٦٤ م، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٥٢° فما طول هذا السياج؟

٢٢ البرهنة النظرية: أ ب جـ مثلث فيه ى منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$،

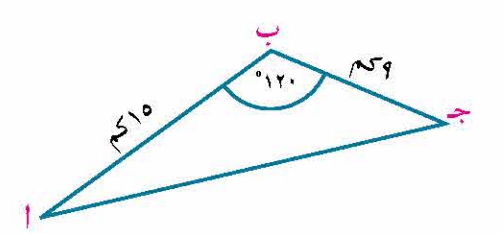
أثبت أن: (أ ب)$^{٢}$ + (أ جـ)$^{٢}$ = ٢ (أ ى)$^{٢}$ + ٢ (ب ى)$^{٢}$،

وإذا كان: أ ب = ٥سم، أ جـ = ٨سم، ب جـ = ١٢ سم أوجد أ ى.

٢٣ البرهنة النظرية (للمتفوقين): في المثلث أ ب جـ إذا كان: (أَ + بَ + جـَ) (أَ + بَ - جـَ) = ك أَ بَ

فاثبت أن: ك ∈ ]٠ ، ٤[ ، ثم أوجد ق(∠جـ) عندما ك = ١

**تطبيقات حياتية:**




(٢٤) **مسافات:** يركب كريم دراجته البخاريه ليقطع المسافة من المدينة أ إلى المدينة جـ مرورًا بالمدينة ب بسرعة منتظمة مقدارها ٣٦ كم/س ، ثم يعود من المدينة جـ إلى المدينة أ بسرعة منتظمة مقدارها ٤٢ كم/س. **أوجد:**

أ) المسافة بالكيلو متر بين المدينة جـ ، المدينة أ

ب) الزمن الكلي بالدقيقة للرحلة كلها.

(٢٥) **التصميم المعماري:** صمم مهندس معماري مبنى على شكل مثمن منتظم، طول كل ضلع من أضلاعه ٦ أمتار، أوجد أطوال الأقطار $\overline{\text{ع ب}}$ ، $\overline{\text{ع جـ}}$ ، $\overline{\text{ع ى}}$ .

(٢٦) **اكتشف الخطأ:** أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٧سم ، بَ = ١٠ سم ، جـَ = ٥سم
ق(∠أ) = ٤١,٦٢° . أوجد ق(∠ب)

**حل زياد**

∴ $\frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}}$

∴ $\frac{١٠}{\text{جا ب}} = \frac{٧}{\text{جا } ٤١,٦٢}$

∴ جا ب = $\frac{١٠ \text{ جا } ٤١,٦٢}{٧} \simeq ٠,٩٤٨٨$

∴ ق(∠ب) = ٧١,٥٩°

**حل كريم**

∵ جتا ب = $\frac{\text{أَ}^٢ + \text{جـَ}^٢ - \text{بَ}^٢}{٢ \text{ أَ جـَ}}$

∴ جتا ب = $\frac{(٧)^٢ + (٥)^٢ - (١٠)^٢}{٢ \times ٧ \times ٥} \simeq -٠,٣٧١٤$

∴ ق(∠ب) ≃ ١١١,٨°

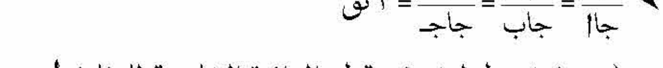
## تمارين عامة

لمزيد من التمارين قم بزيارة موقع وزارة التربية والتعليم.

## ملخص الوحدة

**١** **قانون (قاعدة) الجيب:** فى أى مثلث، تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

**أى أنه** فى أى مثلث أ ب جـ يكون:



$\frac{\text{أَ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{بَ}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـَ}}{\text{جا جـ}} = ٢ \text{ نق}$

(حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ)

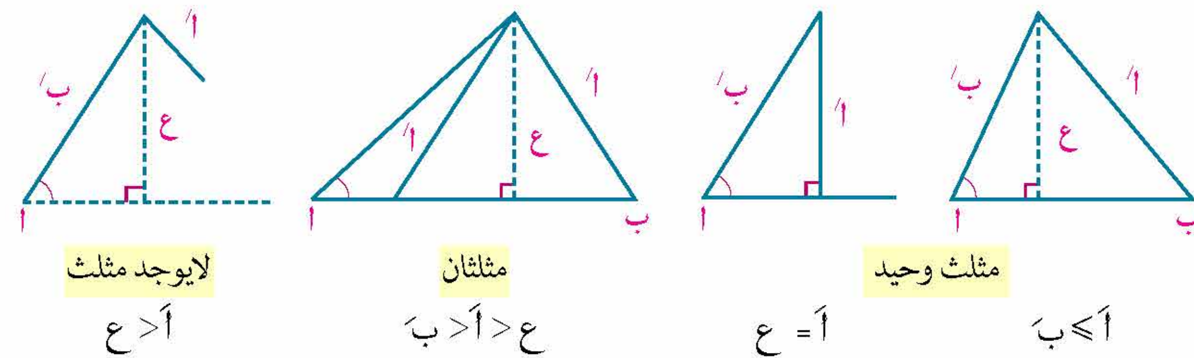
**وقد أمكن استخدام هذا القانون (القاعدة) فى حل المثلث فى الحالات التالية:**

- إذا علم طول أحد أضلاعه وقياسا زاويتين.
- إذا علم طولا ضلعين فيه وقياس زاوية ليست محصورة بينهما

**٣** **تحديد عدد المثلثات والحالة المبهمة:**

**الحالة المبهمة:** التي يكون معلومًا فيها طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

وبفرض أن طولا الضلعين هما أَ ،بَ والزاوية الحادة أ ، ارتفاع المثلث ع = بَ جا أ فإن:




**مساحة سطح أى مثلث = نصف حاصل ضرب طولى أى ضلعين متجاورين × جيب الزاوية المحصورة بينهما**

مساحة سطح المثلث أ ب جـ $= \frac{١}{٢}$ أَ بَ جا جـ $= \frac{١}{٢}$ أَ حـَ جا ب $= \frac{١}{٢}$ بَ حـَ جا أ

**قانون (قاعدة ) جيب التمام:** ينص قانون (قاعدة ) جيب التمام على أنه:

فى أى مثلث أب جـ يكون

$\text{أَ}^٢ = \text{بَ}^٢ + \text{جـَ}^٢ - ٢\text{بَ جـَ جتا أ} \quad \text{ومنه} \quad \text{جتا أ} = \frac{\text{بَ}^٢ + \text{جـَ}^٢ - \text{أَ}^٢}{٢\text{بَ جـَ}}$

$\text{بَ}^٢ = \text{جـَ}^٢ + \text{أَ}^٢ - ٢\text{جـَ أَ جتا ب} \quad \text{ومنه} \quad \text{جتا ب} = \frac{\text{جـَ}^٢ + \text{أَ}^٢ - \text{بَ}^٢}{٢\text{جـَ أَ}}$

$\text{جـَ}^٢ = \text{أَ}^٢ + \text{بَ}^٢ - ٢\text{أَ بَ جتا جـ} \quad \text{ومنه} \quad \text{جتا جـ} = \frac{\text{أَ}^٢ + \text{بَ}^٢ - \text{جـَ}^٢}{٢\text{أَ بَ}}$

**استخدام قانون جيب التمام فى حل المثلثات:** يمكن استخدام قاعدة جيب التمام فى حل المثلث إذا علم:

- طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.
- أطوال أضلاعه الثلاثة.
- طولا ضلعين وقياس زاوية (حيث يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلاً للحالة المبهمة، والتى سبق دراستها فى قانون الجيب ، حيث إنه لإيجاد طول الضلع الثالث باستخدام قانون جيب التمام ، نحصل على معادلة تربيعية وبحلها يكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الممكنة الناتجة.



## اختبار تراكمى

### أسئلة الاختيار من متعدد

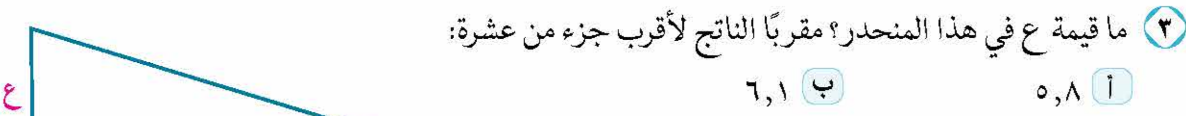
(١) بدون استخدام الآلة الحاسبة تكون قيمة جتا ١٢٠° :

أ $\frac{١}{٢}$ ب $-\frac{١}{٢}$ ج $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ د $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

(٢) أى من الزوايا الآتية يكون الجيب والظل لها سالبان؟



أ ٥٢° ب ١٥٠° ج ٢٠٠° د ٣١٥°



(٣) ما قيمة ع في هذا المنحدر؟ مقربًا الناتج لأقرب جزء من عشرة:



أ ٥,٨ ب ٦,١ ج ١٢,٣ د ١٩,١

(٤) ما قيمة أَ لأقرب جزء من عشرة في △ أ ب جـ الذي فيه بَ = ٦سم ، جـَ = ٧سم ، ق (∠ أ) = ٣٠° :

أ ٣,٤سم ب ٣,٥سم ج ٣,٦ سم د ٦,٦سم

(٥) إذا كان ضلع النهاية لزاوية قياسها $\theta$ في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة عند النقطة ( $\frac{١}{٢}$، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ )
فإن ظا $\theta$ تساوي:

أ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ب $\frac{\sqrt{٣}}{٤}$ ج $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$ د $\sqrt{٣}$

(٦) المتطابقة المثلثية التى تربط بين ظا هـ، قا هـ تعطى على الصورة:

أ قا^٢ هـ - ظا^٢ هـ =١ ب ظا^٢ هـ + قا^٢ هـ =١ ج ظا^٢ هـ - قا^٢ هـ =١ د (١ + ظا هـ)^٢ = قا^٢ هـ

(٧) نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث أ ب جـ ، الذى فيه ق (∠ أ) = ٦٠° ، أَ = ٢$\sqrt{٣}$ سم يكون طوله:

أ ٢سم ب $\sqrt{٣}$ سم ج ٢$\sqrt{٣}$ سم د $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ سم

(٨) فى أى مثلث ل م ن يكون المقدار $\frac{مَ^٢ + نَ^٢ - لَ^٢}{٢ مَ نَ}$ مساويًا:

أ جتا م ب جا ن ج جتا ل د جا م

### أسئلة ذات إجابات قصيرة:

(٩) أوجد القيمة الدقيقة لكل نسبة مثلثية فيما يأتى:

أ جا ٢٢٥° ب قا ١٥٠° ج ظا $\frac{٣\pi}{٤}$ د جتا $\frac{٧\pi}{٦}$

(١٠) أوجد زاوية بقياس موجب ، وأخرى بقياس سالب مشتركتين مع ضلع النهاية مع كل زاوية من الزوايا الآتية:

أ ١٣٥° ب ٣١٥° ج -٤٥° د $\frac{٢\pi}{٣}$

(١١) حول قياس الزاوية المكتوبة بالدرجات إلى الراديان والمكتوبة بالراديان إلى الدرجات:

أ ٣٠٠° ب -١٣٥° ج $\frac{٨\pi}{٥}$ د $\frac{٧\pi}{٤}$

(١٢) أوجد طول القوس المقابل للزاوية ٢١٠° في دائرة طول نصف قطرها ٦سم.

[إرشاد: طول القوس (ل) = هـ^ء × نق ]

(١٣) إذا كان جا أ = $\frac{٥}{١٣}$ حيث $\frac{\pi}{٢}$ < أ < $\pi$ ، ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ حيث $\pi$ < ب < $\frac{٣\pi}{٢}$ أوجد قيمة جا أ جتا ب + جتا أ جا ب.

**إرشادات للاختبار: السؤال (١٣)** أوجد النسب المثلثية لكل من الزاويتين أ ، ب ، واضعًا فى الاعتبار الربع الذى تقع فيه كل زاوية ثم عوض فى المقدار المعطى.

(١٤) في المثلث س ص ع إذا كان سَ = ١٠سم ، ق(∠س) = ٣٠° ، ق(∠ص) = ٤٥° ، فأوجد صَ مقربًا لرقم عشرى واحد.

(١٥) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٤سم، بَ = ٥سم ، جـَ = ٦سم ، أوجد قياس أكبر زاوية فى المثلث ، ثم أوجد مساحته.

**أسئلة ذات إجابات طويلة:**

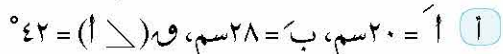
(١٦) أ ب جـ مثلث فيه ق(∠أ) = $\frac{٢}{٣}$ ق(∠ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠جـ) ، طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه ١٠سم أوجد مساحة المثلث أ ب جـ.

(١٧) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ١٣سم ، بَ=١٤سم ، جـَ = ١٥سم ، أوجد طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه.

(١٨) حل المثلث ل م ن الذى فيه مَ = ١٧سم ، ق(∠ل) = ١٦° ٣٣° ، ق(∠ن) = ١٩° ٤٤°

(١٩) حدد إذا كان للمثلث أ ب جـ في كل مما يأتى حل واحد ، أم حلان، أم ليس له حل. أوجد عدد الحلول ، مقربًا أطوال الأضلاع إلى أقرب جزء من عشرة ، وقياسات الزوايا إلى أقرب درجة.

أ) أَ = ٢٠سم، بَ = ٢٨سم، ق(∠أ) = ٤٢°



ب) أَ = ٥ سم، بَ =٧ سم، ق(∠أ) =٦٠°

جـ) أَ = ١٥سم، بَ = ١٠سم، ق(∠أ) = ١٢٠°

(٢٠) مستعينًا بالشكل المقابل أثبت أن:

أَ$^٢$=بَ$^٢$ + جـَ$^٢$- ٢بَ جـَ جتا أ

(**إرشاد:** استخدام قانون البعد بين نقطتين لإيجاد (ب جـ)$^٢$

**هل تحتاج إلى مساعدة إضافية:**

| إذا لم تستطع حل السؤال رقم | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ارجع إلى | مهارات سابقة | مهارات سابقة | الدرس ٣-١ | الدرس ٣-٢ | مهارات سابقة | الدرس ٣-١ | الدرس ٣-٢ | الدرس ٣-١ | الدرس ٣-٢ | الدرس ٣-١ |
| | ١١ | ١٢ | ١٣ | ١٤ | ١٥ | ١٦ | ١٧ | ١٨ | ١٩ | ٢٠ |
| | مهارات سابقة | مهارات سابقة | أول ثانوى | الدرس ٣-١ | الدرس ٣-٢ | الدرس ٣-١ | الدرس ٣-١، ٣-٢ | الدرس ٣-١ | الدرس ٣-١ | الدرس ٣-٢ مهارات سابقة |

# اختبارات عامة

## الاختبار الأول — الجبر

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

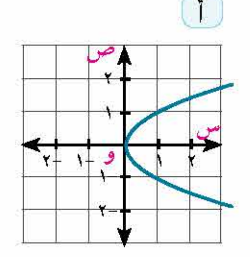
**السؤال الأول:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) إذا كان $٥^{س} = ٢$ فإن $٢٥^{س} =$

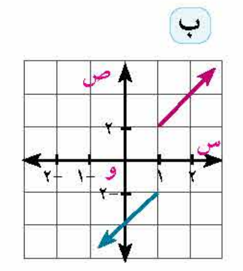
أ ١٠ — ب ٦ — ج ٥ — د ٤

(٢) الشكل الذى يمثل دالة فى س من بين الأشكال الآتية هو:

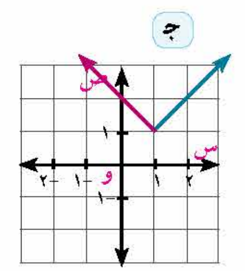
أ



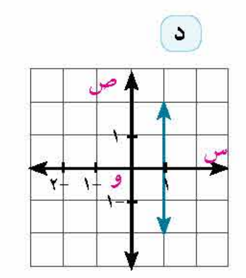

ب




ج




د




(٣) إذا كان منحنى $ص = لو_{٤}(١ - أ س)$ يمر بالنقطة $(\frac{١}{٤} ، -\frac{١}{٢})$ فإن $أ =$

أ ٢ — ب ٣ — ج ٤ — د ٨

(٤) الدالة الأحادية من بين الدوال الآتية هى:

أ $د_{١}(س) = س + ٢$ — ب $د_{٢}(س) = س^{٢}$ — ج $د_{٣}(س) = |س|$ — د $د_{٤}(س) = ٥$

**السؤال الثانى:**

(١) عين مجال كل من الدوال الآتية:

أ $د(س) = \frac{س}{\sqrt{س - ١}}$ — ب $ر(س) = \frac{س - ١}{س^{٢} - ١} + \frac{١}{س + ١}$

(٢) إذا كانت د دالة حيث $د(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، ٠ < س \\ -٢س & ، ٠ > س \end{cases}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ومن الرسم أوجد مدى هذه الدالة.

**السؤال الثالث:**

(١) إذا كان $د_١$: ع ⟵ ع حيث $د_١$(س) = ٣س - ١، $د_٢$: [-٢، ٣] ⟵ ع حيث $د_٢$(س) = ٣ - ٢س فارسم الدالة ($د_١$ + $د_٢$) (س) محددًا مجالها ثم ابحث اطراد الدالة.

(٢) أوجد الدالة العكسية للدالة ص = س + ١ ومثلهما فى شكل واحد.

**السؤال الرابع:**

(١) **أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:**

(أ) $لو_٤$ س = ١ - $لو_٤$ (س - ٣)  (ب) |س + ٢| = |س - ٣|

(٢) **استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = $س^٢$ فى رسم كلٍّ من:**

(أ) $د_١$(س) = د(س + ٢)  (ب) $د_٢$(س) = $س^٢$ + ٣

**السؤال الخامس:**

(١) أوجد مجموعة حل المتباينة |٣س - ٢| ⩽ ٧

(٢) أوجد مجموعة حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}}$ - ١٠$س^{\frac{٢}{٣}}$ + ٩ = صفر

## الاختبار الثانى — الجبر

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

**السؤال الأول:** **اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.**

(١) إذا كانت $٣^{س-٢}$ = $٢^{س-٢}$ فإن س =

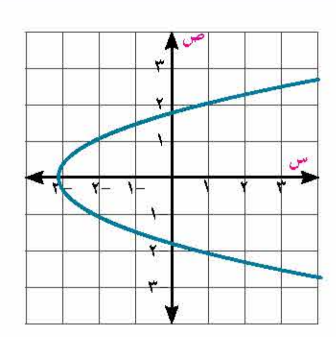
(أ) ٣  (ب) -٢  (ج) صفر  (د) ٢

(٢) إذا كانت ص = $\sqrt[٣]{س}$ لكل س ⩾ . فإن الدالة العكسية لها ص =

(أ) ص = $\frac{١}{٣}$$س^٣$  (ب) ص = $س^٣$  (ج) ص = $س^٣$ - ١  (د) ص = $س^{-\frac{١}{٣}}$

(٣) إذا كانت (د) دالة فردية على [-س ، س] فإن د(-س) + د(س) =

(أ) ٢س  (ب) غير معرفة  (ج) -٢س  (د) صفر



٤ المنحنى الموضح بالشكل المقابل متماثل حول المستقيم الذى معادلته

أ س = صفر    ب ص = صفر

ج ص = -٢    د س = ٢

**السؤال الثانى:**

١ إذا كان د(س) = $أ^{س}$ فإثبت أن المقدار $\frac{١}{د(س) + ١} + \frac{١}{د(-س) + ١}$ له قيمة ثابتة مهما كانت قيمة س.

٢ اختصر لابسط صورة : $لو_{ب}\ أ^{٢} \times لو_{ج}\ ب^{٣} \times لو_{أ}\ ج$

**السؤال الثالث:**

١ استخدم منحنى الدالة د حيث د(س) = |س| لتمثيل كل مما يأتي:

أ $د_{١}(س)$ = |س| + ١    ب $د_{٢}(س)$ = ٢ - |س|

٢ ارسم منحنى كلٍّ من الدوال الآتية و حدد مداها ثم ابحث اطرادها:

أ د(س) = $\sqrt{س^{٢} - ٤ س + ٤}$    ب د(س) = |$س^{٢}$ - ٤س + ١| حيث س∋ [٠، ٤]

**السؤال الرابع:**

١ ابحث نوع كلٍ من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك.

أ $د_{١}(س)$ = س جتا س    ب $د_{٢}(س) = \begin{cases} س^{٢} & س \geqslant ٠ \\ |س| & س < ٠ \end{cases}$

ج $د_{٣}(س)$ = $س^{٢}$|س| - ١

٢ أوجد مجموعة الحل لكل ممايأتى:

أ |س| + س = ٠    ب |٢ س - ٣| - |٦ - ٤ س| > ٠

**السؤال الخامس:**

١ إذا كان د(س) = $س^{٢}$ - ١ ، ر(س) = س + ١ فارسم الدالة $\frac{د}{ر}$ (س) مبينًا مجال ومدى الدالة ثم ابحث اطرادها.

٢ بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة    لو ٢٥ + $\frac{لو ٨ \times لو ١٦}{لو ٦٤}$

## الاختبار الثالث — تفاضل وحساب مثلثات

**أجب عن الأسئلة الآتية:**

**السؤال الأول:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) نهـا (س ← ∞) $\frac{س^٣ + ٥}{س(٢س^٢ + ٣)}$ =

(أ) $\frac{٥}{٨}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٥}{٣}$

(٢) فى △أ ب جـ إذا كان ٤ جا أ = ٣ جا ب = ٦ جا جـ فإن ق(∠جـ) ≃

(أ) °٨٩ (ب) °٢٩ (جـ) °٥٧ (د) °٨٢

(٣) إذا كانت د(س) = { $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ ، س ≠ ١ ؛ ٢أ ، س = ١ } متصلة عند س = ١ فإن أ تساوى:

(أ) صفر (ب) -٢ (جـ) ٢ (د) ١

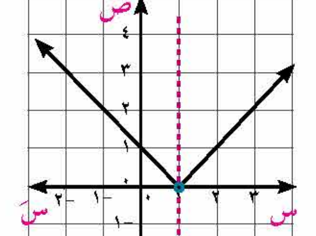
(٤) فى △س ص ع المقدار $\frac{سَ^٢ + صَ^٢ - عَ^٢}{٢سَ صَ}$ يساوى:

(أ) جتا س (ب) جتا ص (جـ) جتا ع (د) جا ع

**السؤال الثانى:**

(١) أوجد (أ) نهـا (س ← ٢) $\frac{س^٥ - ٣٢}{س^٢ + ٣س - ١٠}$ (ب) نهـا (س ← ٠) $\frac{جا ٢س + ٥جا ٣س}{س}$

(٢) حل المثلث △أ ب جـ الحاد الزوايا الذى فيه أَ = ٢١سم ، بَ = ٢٥سم وطول قطر الدائرة المارة برؤوسة ٢٨سم.




**السؤال الثالث:**

(١) من الرسم البياني المقابل أوجد:

(أ) نهـا (س ← ١) د(س) (ب) نهـا (س ← ٢) د(س) (جـ) د(١) =

(٢) أ ب جـ ء متوازى الأضلاع فيه ق(∠أ) = °٥٠ ، ق(∠ء ب جـ) = °٧٠ ، ب ء = ٨سم أوجد محيط متوازى الأضلاع.

**السؤال الرابع:**

(١) أ ب جـ مثلث فيه أَ = ٥سم، بَ = ٧سم ، ق(∠أ) = °٤٠ أوجد ق(∠ب).

(٢) أوجد قيمة أ التى تجعل الدالة د متصلة عند س = ٢ حيث :

د(س) = { س^٢ - ١ ، س ≥ ٢ ؛ س - ٢أ ، س < ٢ }

**السؤال الخامس:**

(١) ابحث وجود نهاية للدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{ظا ٢س}{جا س} & \text{عندما } س < ٠ \\ \frac{٥س + ٦}{س + ٣} & \text{عندما } س > ٠ \end{cases}$ عندما س ⟵ ٠

(٢) $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٤ - \sqrt{س + ١٥}}{١ - س^٢}$

---

## الاختبار الرابع — تفاضل وحساب مثلثات

**أجب عن جميع الأسئلة الآتية:**

**السؤال الأول:** اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

(١) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س^٢ - ٩} =$

أ) ٣ ب) $\frac{١}{٩}$ جـ) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٦}$

(٢) فى △أ ب جـ يكون جتا (أ + ب) =

أ) $\frac{أَ^٢ + بَ^٢ - جـَ^٢}{٢أَ بَ}$ ب) $\frac{أَ^٢ + جـَ^٢ - بَ^٢}{٢أَ بَ}$ جـ) $\frac{بَ^٢ + جـَ^٢ - أَ^٢}{٢بَ جـَ}$ د) $\frac{جـَ^٢ - أَ^٢ - بَ^٢}{٢أَ بَ}$

(٣) أ ب جـ مثلث فيه $\frac{جا أ}{٣} = \frac{٢ جا ب}{٥} = \frac{جا جـ}{٤}$ فإن أَ : بَ : جـَ =

أ) ٦ : ٥ : ٨ ب) ٨ : ٥ : ٦ جـ) ٧ : ٢ : ٤ د) ٣ : ٥ : ٦

(٤) $\lim\limits_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س^٢ + ٣}}{٢س + ١} =$

أ) ١ ب) $\frac{٣}{٢}$ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) ٣

**السؤال الثانى:**

(١) إذا كانت الدالة د حيث د(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} & س \neq -٣ \\ س + أ & س = -٣ \end{cases}$ متصلة عند س = -٣ فأوجد قيمة أ.

(٢) أ ب جـ مثلث فيه $\frac{١}{٣}$ جا أ = $\frac{١}{٤}$ جا ب = $\frac{١}{٥}$ جا جـ أوجد ق(∠جـ) و إذا كان محيط المثلث = ٢٤ سم أوجد مساحته.

**السؤال الثالث:**

(١) أوجد: $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{١ - جتا س + جا ٣ س}{١ - جتا س + ظا ٢ س}$

(٢) حل المثلث أ ب جـ الذى فيه أَ = ٩سم ، بَ = ١٥سم ، ق(∠جـ) = ١٠٦°

## السؤال الرابع:

(١) أوجد $\underset{\text{س} \to -٢}{\text{نهـا}} \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٥} - ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$

(٢) أ ب جـ ى شكل رباعى فيه أ ب = ٢٧سم، ب جـ = ١٢سم، جـ ى = ٨سم، ى أ = ١٢سم، أ جـ = ١٨سم. أثبت أن $\overline{\text{أ جـ}}$ ينصف $\angle$ ب أ ى ثم أوجد مساحة الشكل أ ب جـ ى.

## السؤال الخامس:

(١) أ) أوجد قيمة: $\underset{\text{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٤} - ٢}{\text{س}^{٢} + \text{س}}$    ب) $\underset{\text{س} \to \infty}{\text{نهـا}} \dfrac{١}{\text{س}} \sqrt{٣ + ٤\text{س}^{٢}}$

(٢) شكل خماسى منتظم محيطه ٣٠سم. أوجد مساحة سطحه.

## المواصفات الفنية :

| | |
|---|---|
| مقاس الكتاب : | $\frac{1}{8}$ (٥٧ × ٨٢) سم |
| طبع المتن : | ٤ لون |
| طبع الغلاف : | ٤ لون |
| ورق المتن : | ٧٠ جم أبيض |
| ورق الغلاف : | ١٨٠ جم كوشيه |
| عدد الصفحات : | ١٨٨ صفحة |
| التجليد : | بشر |
| رقم الكتاب | ٤٣٩/١٠/٣/١١/٢/٦١ |






04/0077

دار النصر للطباعة (هدلاين)